

Pilares – noções iniciais

PROF. MSC PATRÍCIA ANDRADE

O que é um pilar?

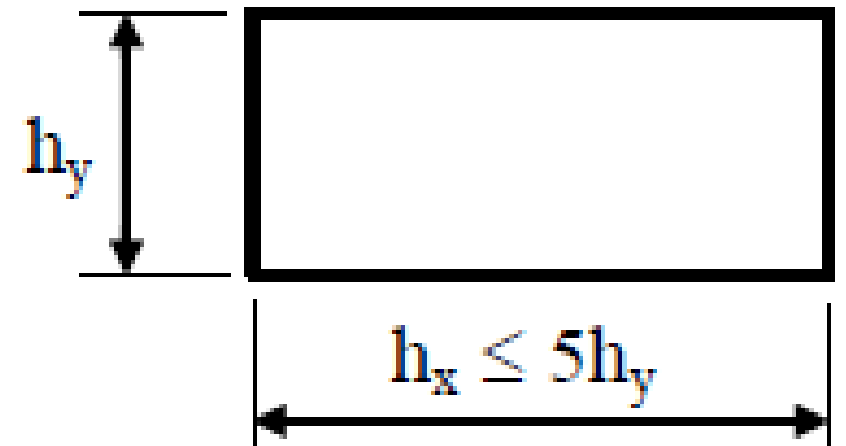
são *Elementos lineares de eixo reto, usualmente dispostos na vertical, em que as forças normais de compressão são preponderantes*

O dimensionamento dos pilares é feito em função dos esforços externos solicitantes de cálculo

-forças normais (N_d)

-os momentos fletores (M_{dx} e M_{dy})

-as forças cortantes (V_{dx} e V_{dy}) no caso de ação horizontal.



O que é um pilar-parede?

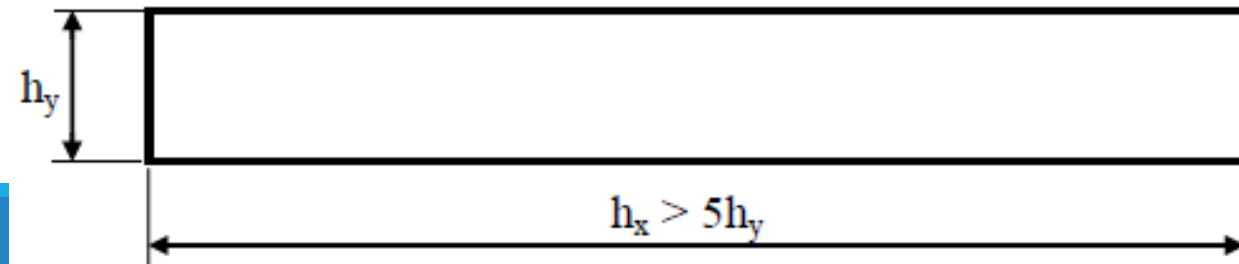
Elementos de superfície plana ou casca cilíndrica, usualmente dispostos na vertical e submetidos preponderantemente à compressão

Podem ser compostos por uma ou mais superfícies associadas

a menor dimensão deve ser menor que 1/5 da maior, ambas consideradas na seção transversal do elemento estrutural

O dimensionamento dos pilares é feito em função dos esforços externos solicitantes de cálculo:

- as forças normais (N_d)
- os momentos fletores (M_{dx} e M_{dy})
- forças cortantes (V_{dx} e V_{dy}) no caso de ação horizontal.



O que iremos ver?

Disposições construtivas segundo NBR 6118/2014

Contraventamento e dimensionamento de pilares

Solicitações nas quais os pilares podem estar sujeitos

Tipos de pilares

Disposições construtivas

Correspondência entre classe de agressividade ambiental e cobrimento nominal para $\Delta c = 10$ mm (Tabela 7.2 da NBR 6118)

Tipo de estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental (CAA)			
		I	II	III	IV ²
		Cobrimento nominal (mm)			
Concreto Armado ⁴	Laje ¹	20	25	35	45
	Viga/Pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo ³	30		40	50

Dimensões mínimas de pilares

não pode apresentar dimensão menor que 19 cm

Em casos especiais, permite-se a consideração de dimensões entre 19 cm e 14 cm, desde que se multipliquem os esforços solicitantes de cálculo a serem considerados no dimensionamento por um coeficiente adicional γ_n

não é permitido pilar com área inferior a 360cm²

Valores do coeficiente adicional γ_n para pilares e pilares-parede

<i>b</i> cm	≥ 19	18	17	16	15	14
γ_n	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25

onde

$$\gamma_n = 1,95 - 0,05 b;$$

b é a menor dimensão da seção transversal, expressa em centímetros (cm).

NOTA O coeficiente γ_n deve majorar os esforços solicitantes finais de cálculo quando de seu dimensionamento.

Área de aço mínima e máxima

Armadura longitudinal

O diâmetro das barras longitudinais não deve:

→ ser inferior a 10mm

→ nem superior a 1/8 da menor dimensão da seção

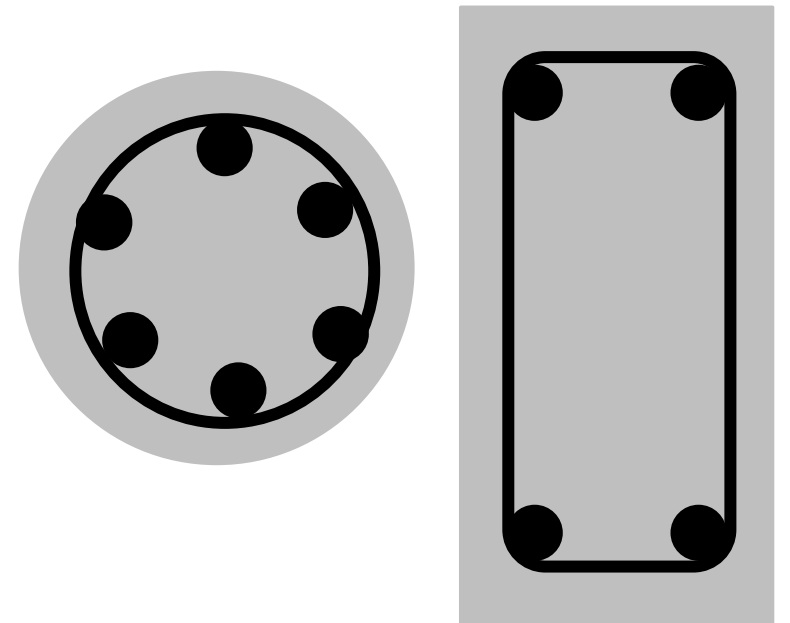
A armadura longitudinal mínima deve ser:

$$A_{smin} = \left(0,15 * \frac{N_d}{f_{yd}} \right) \geq 0,004 * A_c$$

$$A_{smáx} = 8\% * A_c$$

Em **seções poligonais**, deve existir pelo menos uma barra em cada vértice

em **seções circulares**, no mínimo seis barras distribuídas ao longo do perímetro

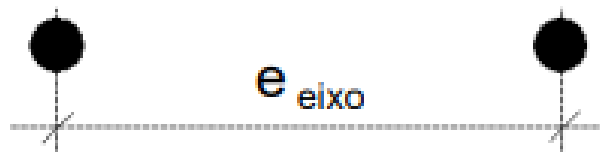


Espaçamentos

O **espaçamento mínimo livre** entre as faces das barras longitudinais, medido no plano da seção transversal, fora da região de emendas, deve ser igual ou superior ao maior dos seguintes valores:

- a) 20 mm;
- b) diâmetro da barra, do feixe ou da luva;
- c) 1,2 vez a dimensão máxima característica do agregado graúdo.

O **espaçamento máximo**:



$$e \leq \begin{cases} 400\text{mm} \\ 2 \times \text{menor dimensão da seção} \end{cases}$$

Noções de contraventamento

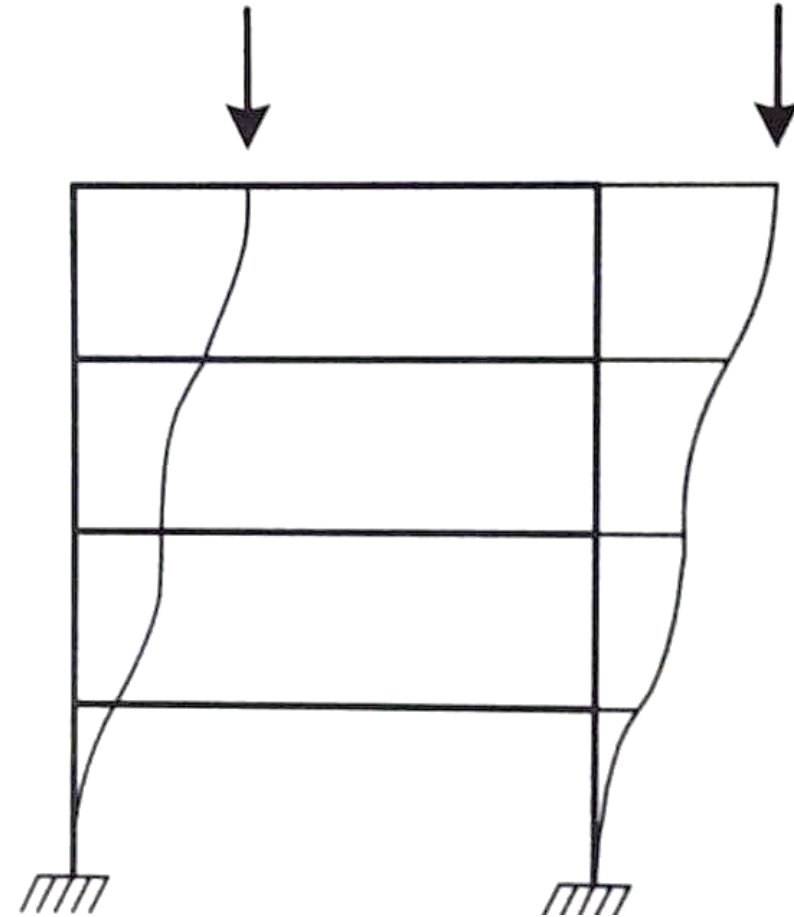
Estruturas de nós móveis

aquelas onde os deslocamentos horizontais não são pequenos

*em decorrência, os efeitos globais de 2ª ordem **são importantes** (superiores a 10 % dos respectivos esforços de 1ª ordem)*

Nessas estruturas devem ser considerados tanto os esforços de 2ª ordem globais como os locais e localizados

Problema: instabilidade global



Estruturas de nós fixos

São aquelas quando os deslocamentos horizontais dos nós são pequenos e, por decorrência, os efeitos globais de 2ª ordem são desprezíveis (inferiores a 10 % dos respectivos esforços de 1ª ordem)

*Nessas estruturas, basta **considerar os efeitos locais e localizados de 2ª ordem***

Edifícios baixos podem dispensar os elementos especiais de contraventamento

Pórticos com lajes cogumelos precisam de estruturas de contraventamento, devido a ausência de vigas

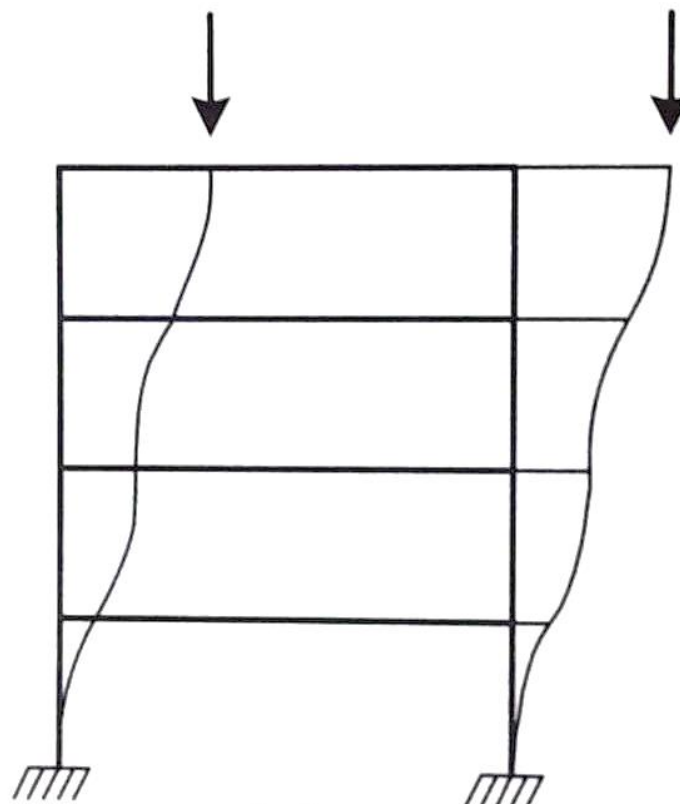
Contraventamento

Função: absorver e resistir a esforços horizontais devido a elevada rigidez

O contraventamento deve possuir rigidez suficiente para garantir que a estrutura tenha deslocamentos horizontais pequenos

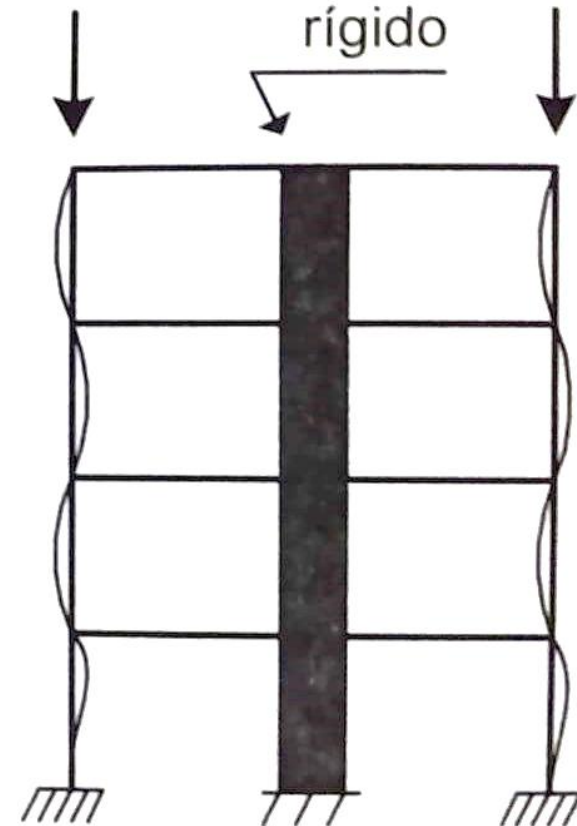
Estrutura com nós fixos → estrutura indeslocável

Estrutura de nós móveis



(a)

Estrutura de nós fixos
elemento
rígido



(b)

Contraventamento

Elementos de contraventamento:

caixas de elevador

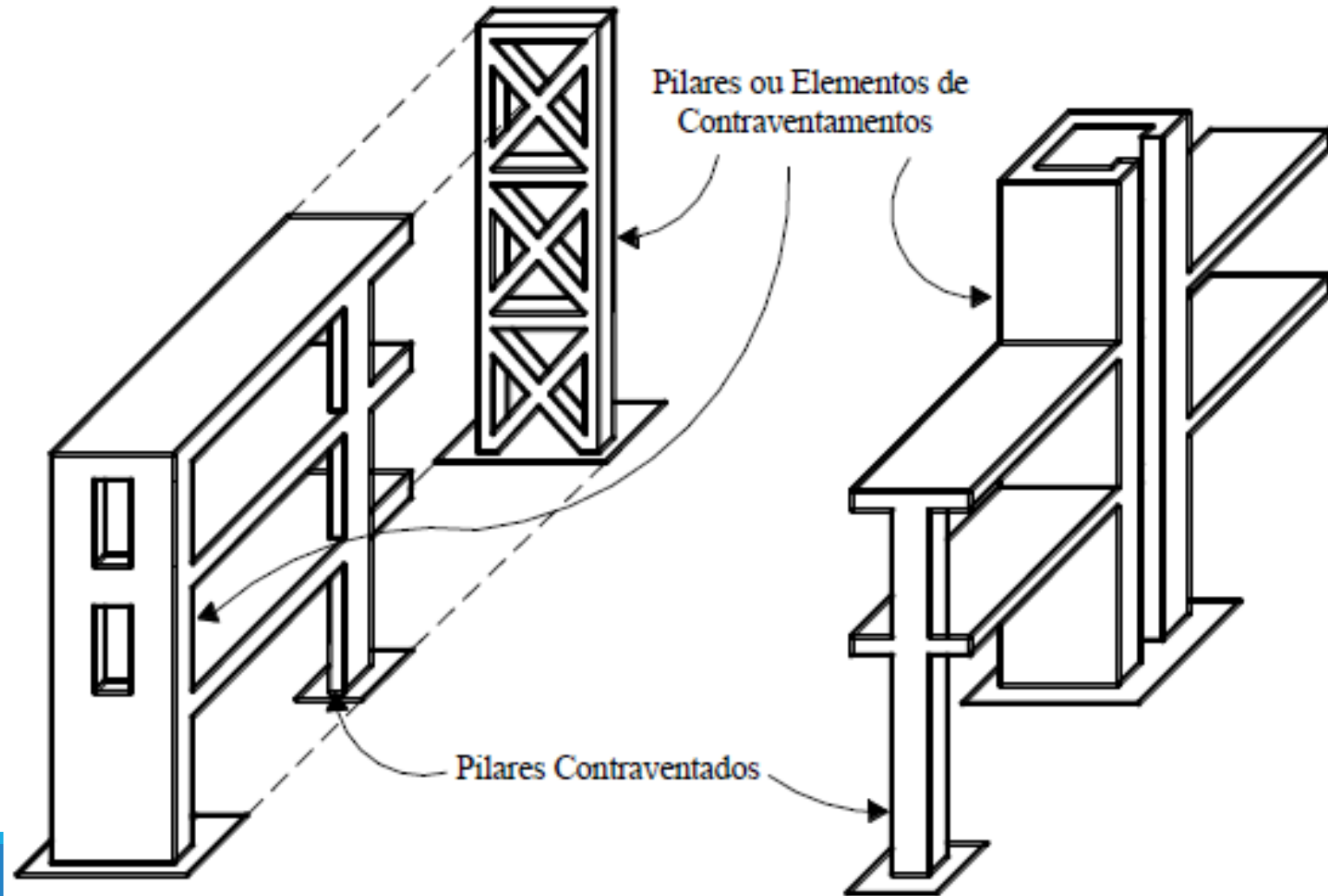
Escadas

Pilar-parede

Paredes estruturais

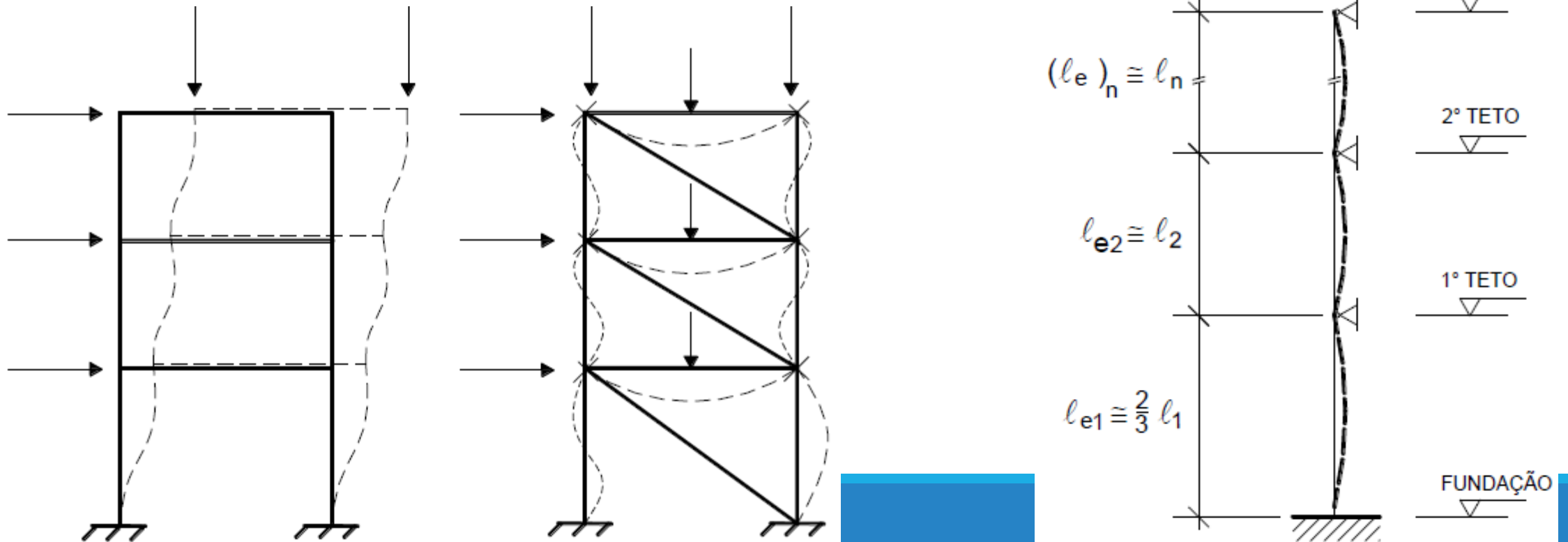
Elementos contraventados:

Estruturas próximas a elementos de contraventamento



Comprimento equivalente

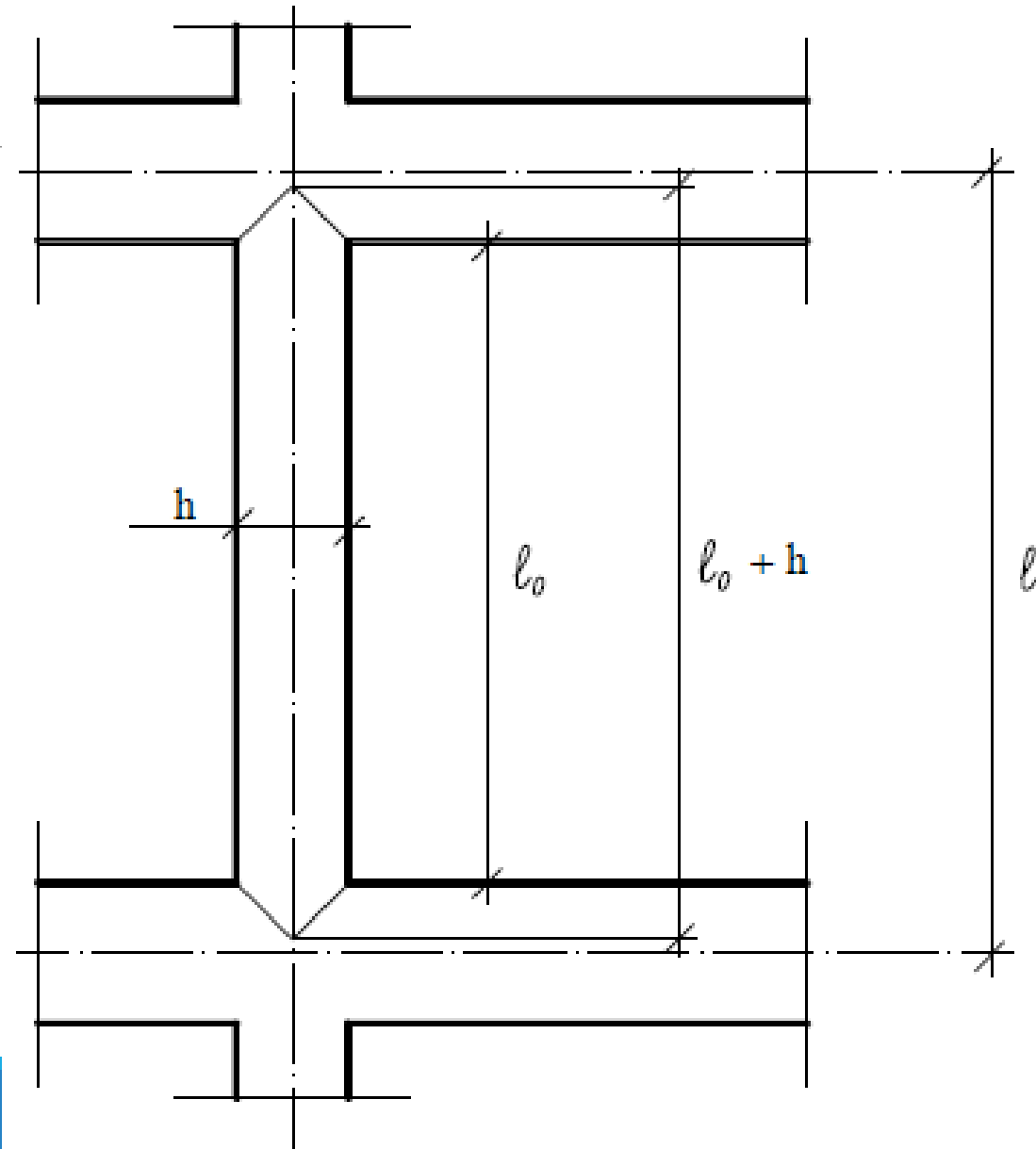
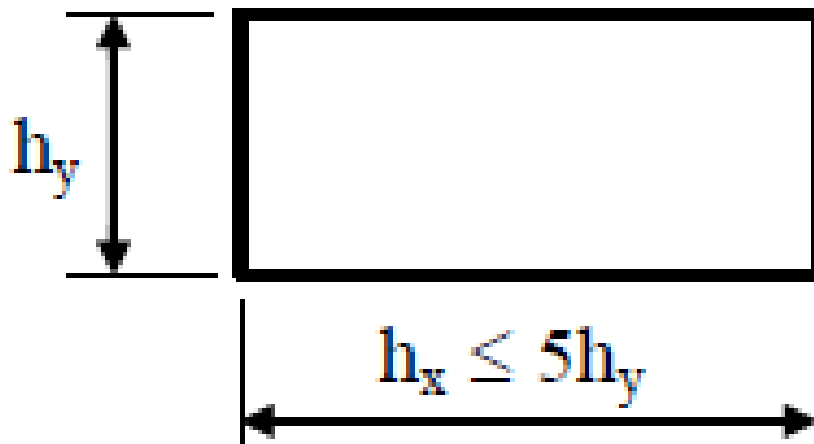
Nas estruturas de nós fixos, o cálculo pode ser realizado considerando cada elemento comprimido isoladamente, como barra vinculada nas extremidades aos demais elementos estruturais que ali concorrem, onde se aplicam os esforços obtidos pela análise da estrutura efetuada segundo a teoria de 1ª ordem.



Comprimento equivalente

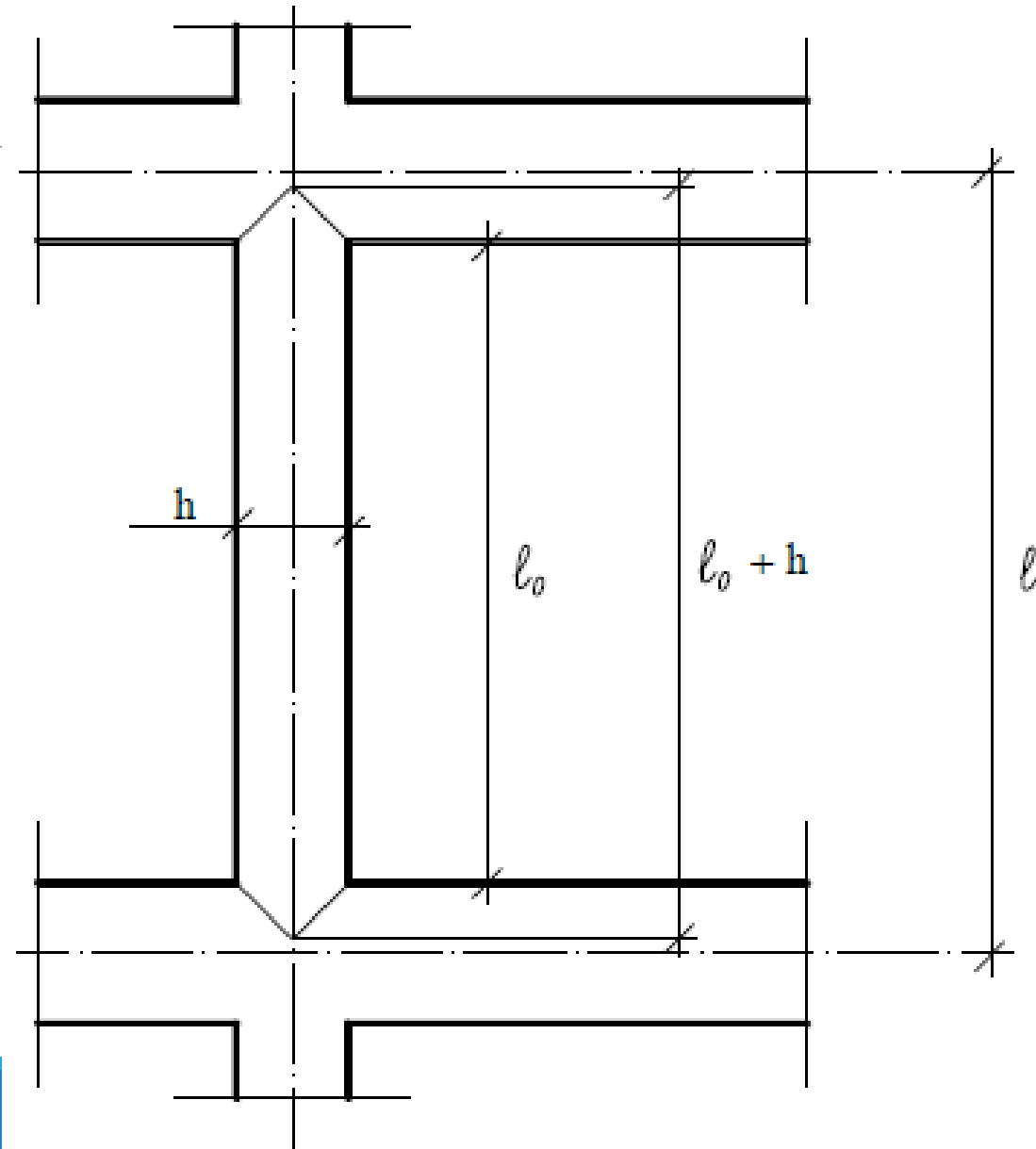
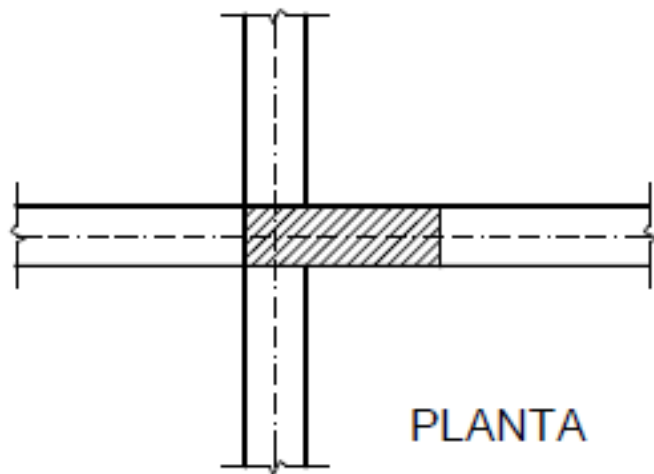
comprimento equivalente (l_e) “do elemento comprimido (pilar), suposto vinculado em ambas as extremidades, deve ser o menor dos seguintes valores:

$$l_e \leq \begin{cases} l_o + h \\ l \end{cases}$$



Exemplo

O pavimento tipo de um prédio tem pé direito de 2,80 m e lajes com espessura de 10 cm. O pilar 5 tem seção transversal de 15 x 40 cm conforme planta esquematizada. Determine o comprimento equivalente do pilar 5.



Resolução

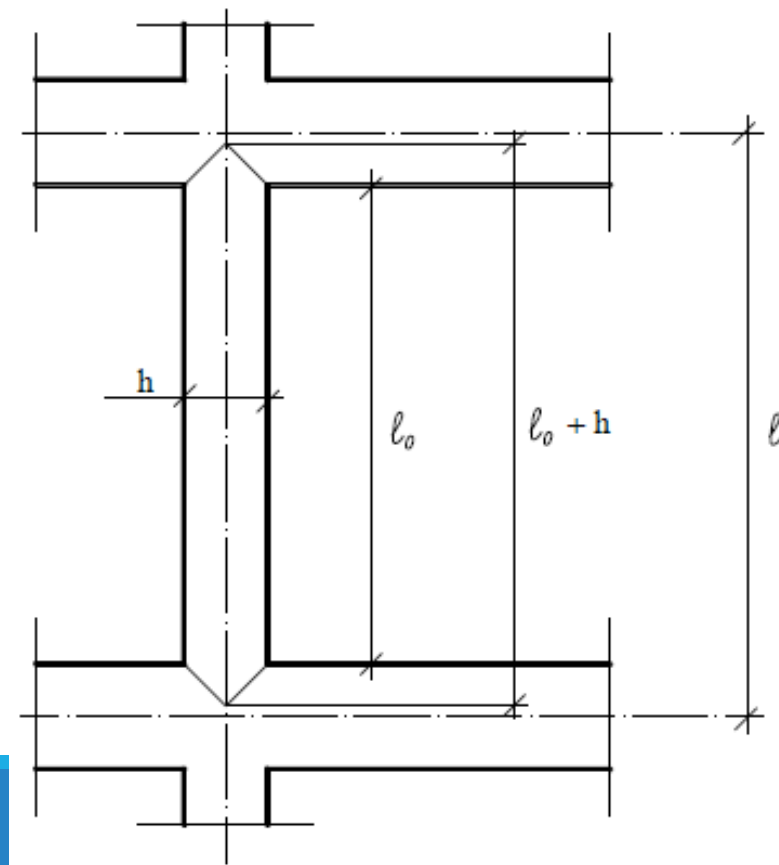
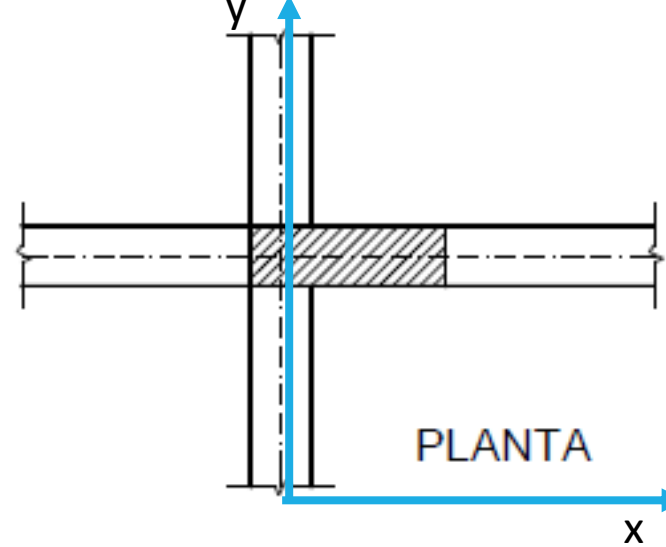
$$l_e \leq \begin{cases} l_0 + h_x \\ l_0 + h_y \\ l \end{cases}$$

1ª situação

$$l_e = l_0 + h_x$$

$$l_e = 2,8 + 0,4$$

$$l_e = 3,2m$$



Resolução

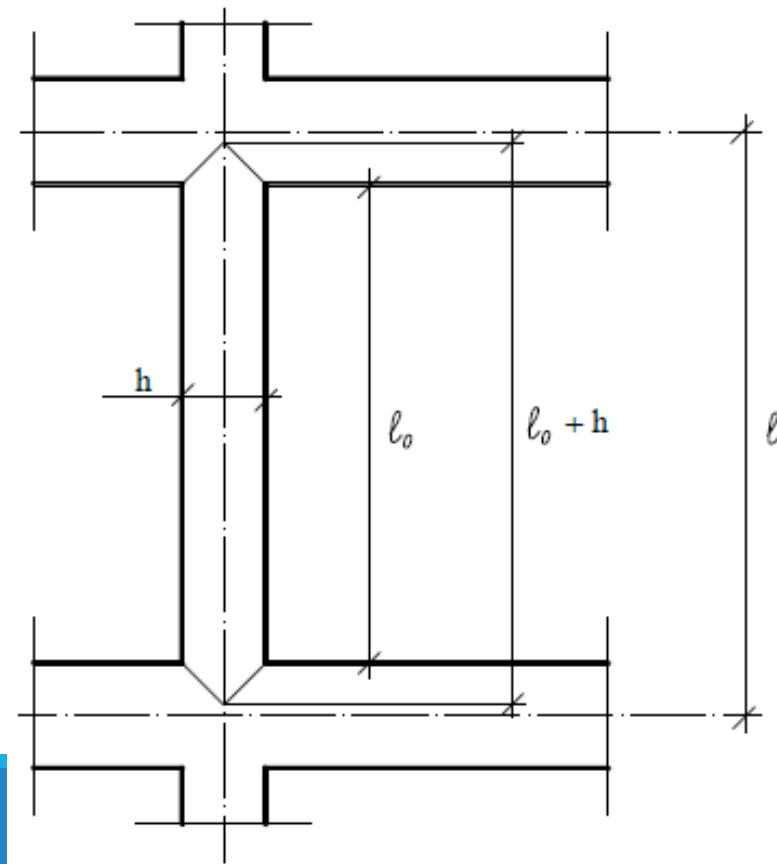
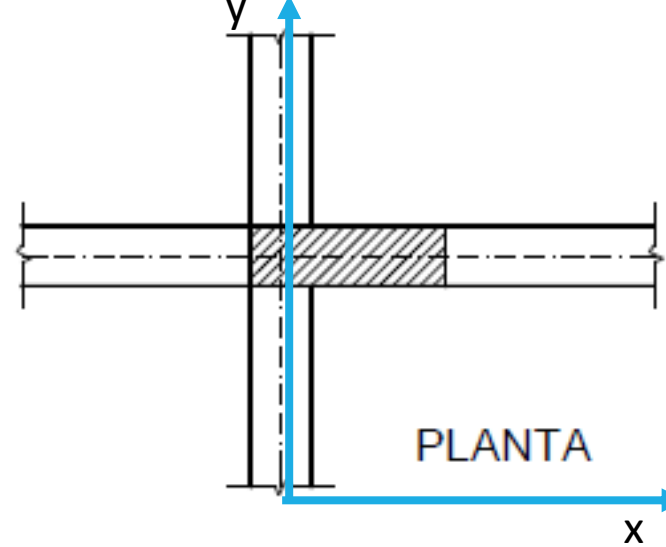
$$l_e \leq \begin{cases} l_0 + h_x \\ l_0 + h_y \\ l \end{cases}$$

2ª situação

$$l_e = l_0 + h_y$$

$$l_e = 2,8 + 0,15$$

$$l_e = 2,95m$$



Resolução

$$l_e \leq \begin{cases} l_0 + h_x \\ l_0 + h_y \\ l \end{cases}$$

3ª situação

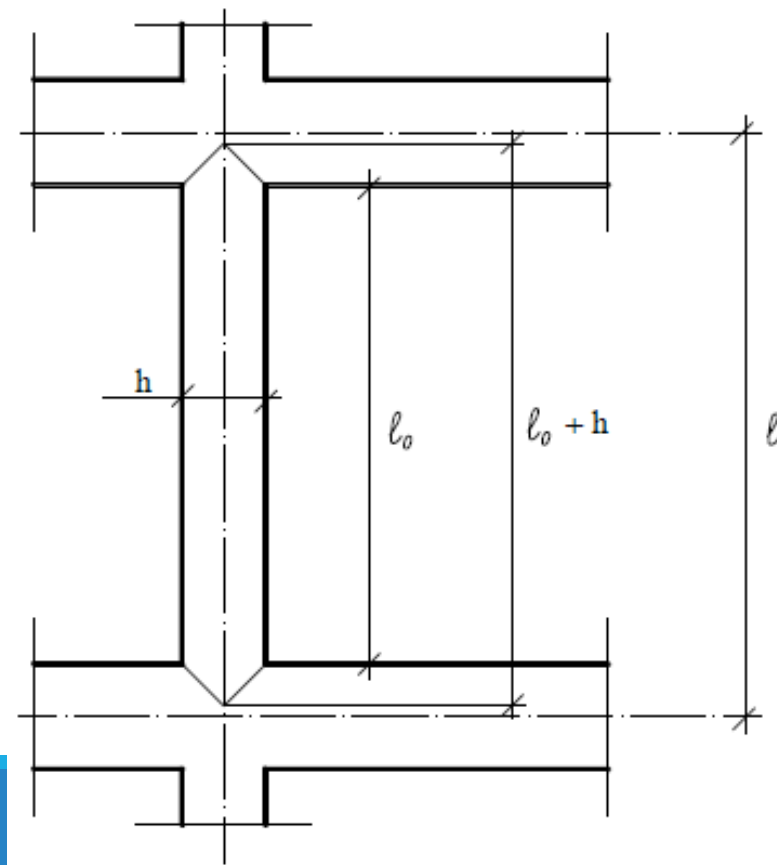
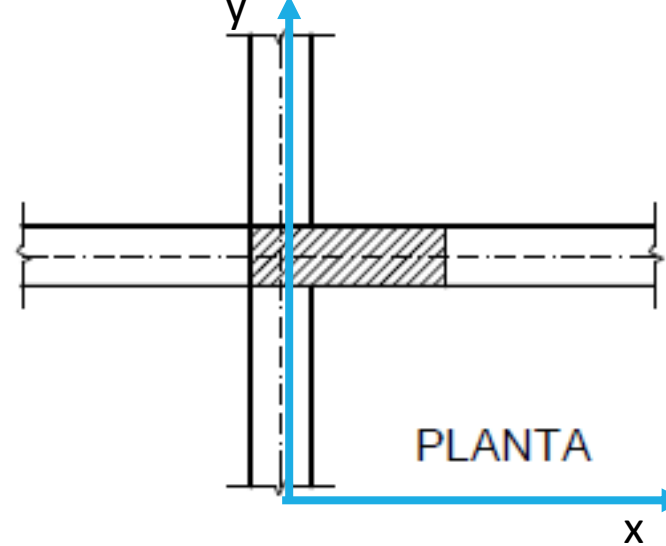
$$l = l_0 + \text{espessura da laje}$$

$$l = 2,8 + 0,1$$

$$l = l_e = 2,9m$$

Qual comprimento equivalente l_e adotar: 3,20;
2,95; 2,90 m?

$$l_e = 2,9m$$



Solicitações e efeitos

Solicitações

Flambagem

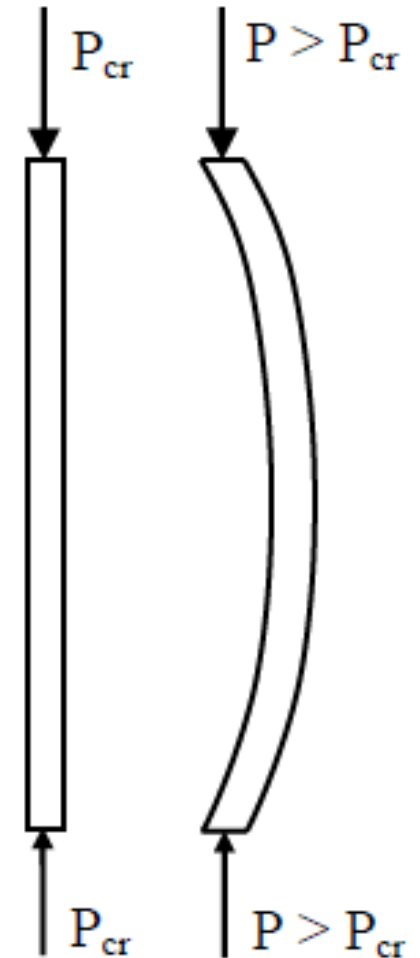
deslocamento lateral na direção de maior esbeltez, com força menor do que a de ruptura do material

instabilidade de peças esbeltas comprimidas

A ruína por efeito de flambagem é repentina e violenta, mesmo que não ocorram acréscimos bruscos nas ações aplicadas

Uma barra comprimida feita por alguns tipos de materiais pode resistir a cargas substancialmente superiores à carga crítica ($N_{crít}$), o que significa que a flambagem não corresponde a um estado-limite último

para uma barra comprimida de Concreto Armado, a flambagem caracteriza um estado-limite último

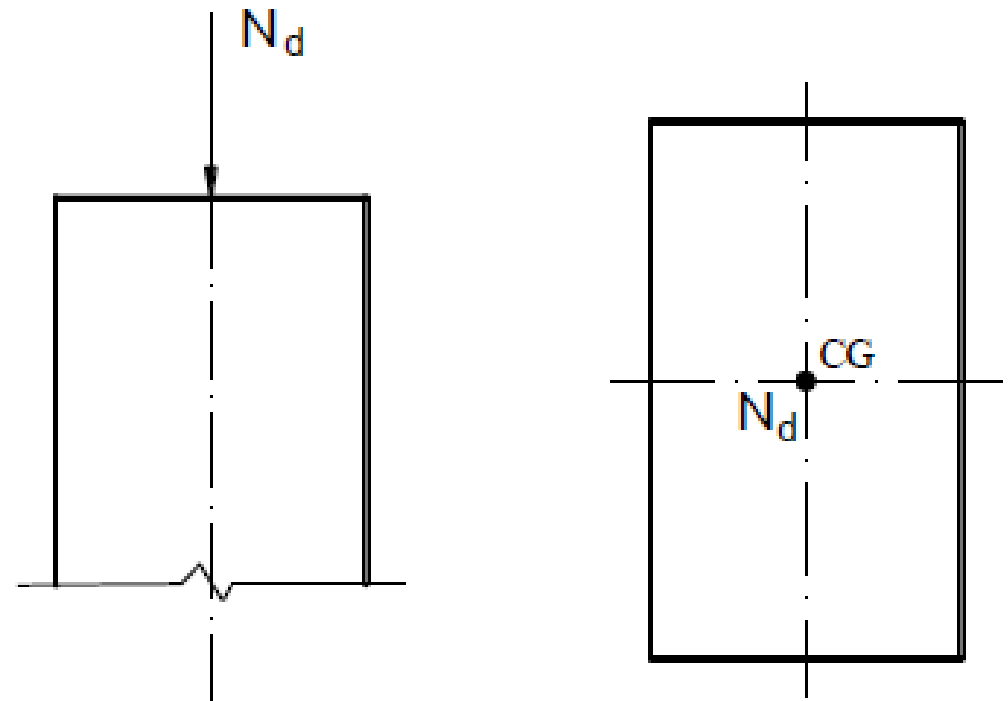


Solicitações

Compressão Simples

A compressão simples também é chamada compressão centrada ou compressão uniforme

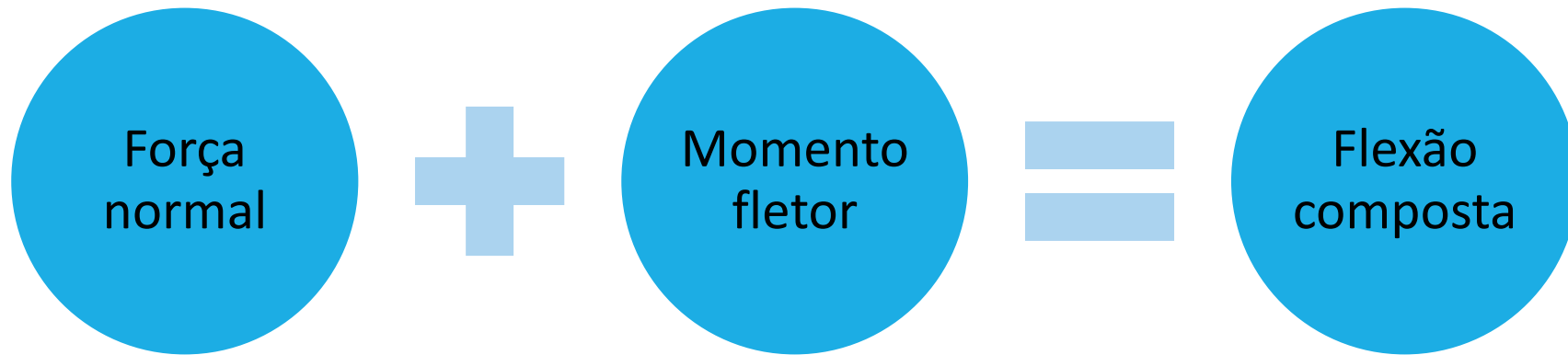
A aplicação da força normal N_d é no centro geométrico (CG) da seção transversal do pilar, cujas tensões na seção transversal são uniformes



Solicitação de compressão simples ou uniforme.

Solicitações

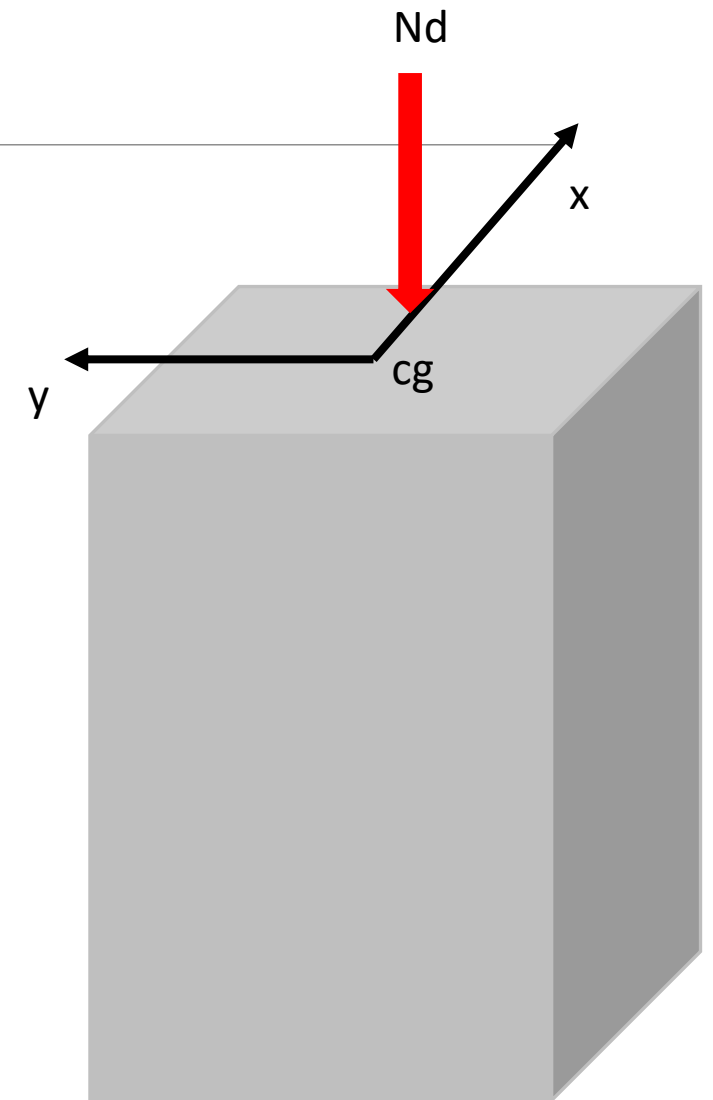
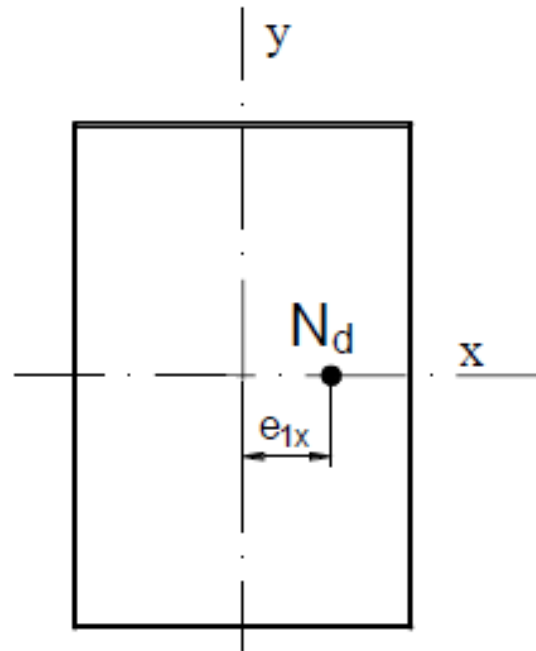
Flexão Composta



Solicitações

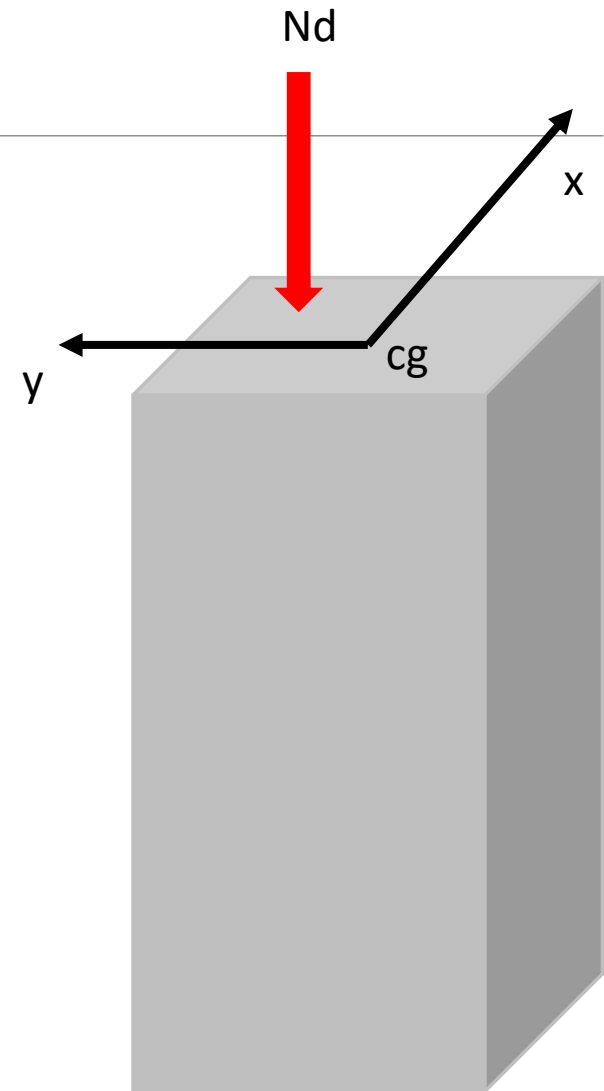
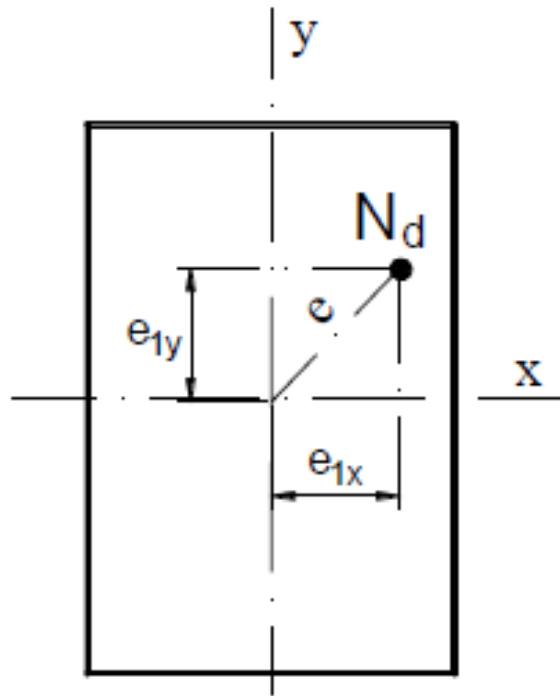
Há dois casos:

- **Flexão Composta Normal (ou Reta):** existe a força normal e um momento fletor em uma direção, tal que $M_{dx} = e_{1x} * N_d$



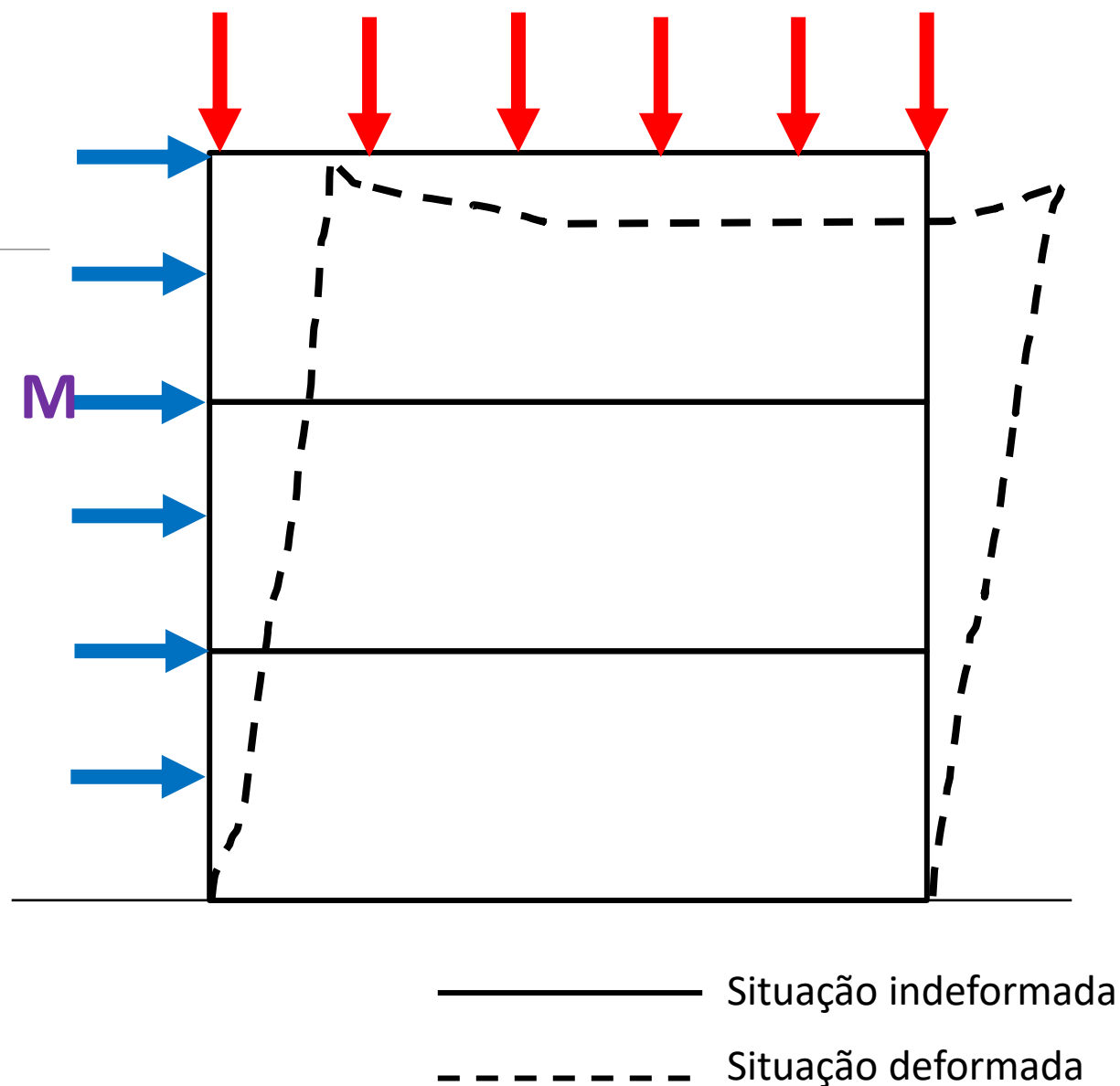
Solicitações

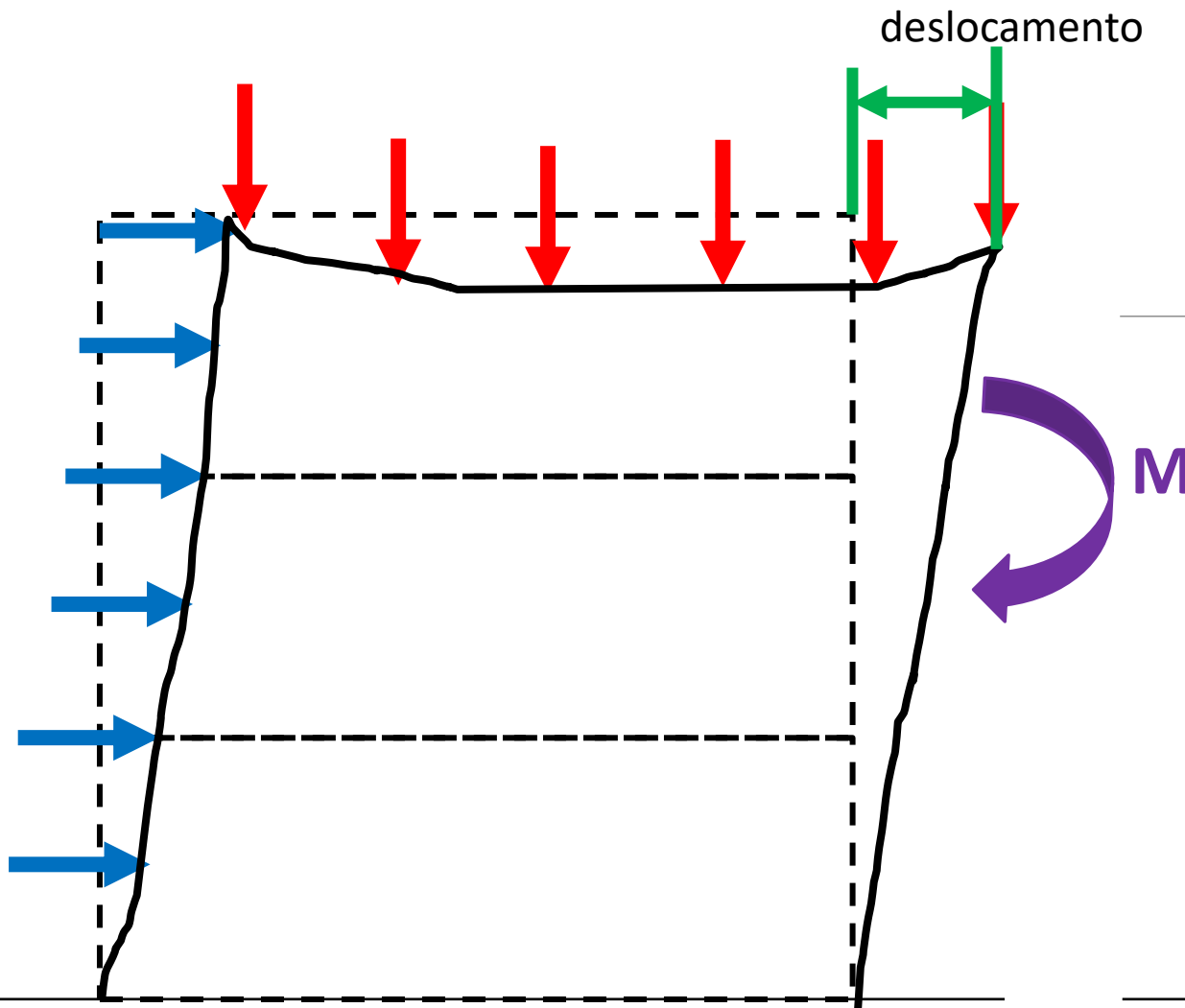
- **Flexão Composta Oblíqua:** existe a força normal e dois momentos fletores, relativos às duas direções principais do pilar, tal que $M_{1d,x} = e_{1x} \cdot N_d$ e $M_{1d,y} = e_{1y} \cdot N_d$



Efeitos de 1ª ordem

- são aqueles obtidos com o cálculo feito com a estrutura considerada indeformada.
- Devido as ações verticais e horizontais as estruturas se deslocam

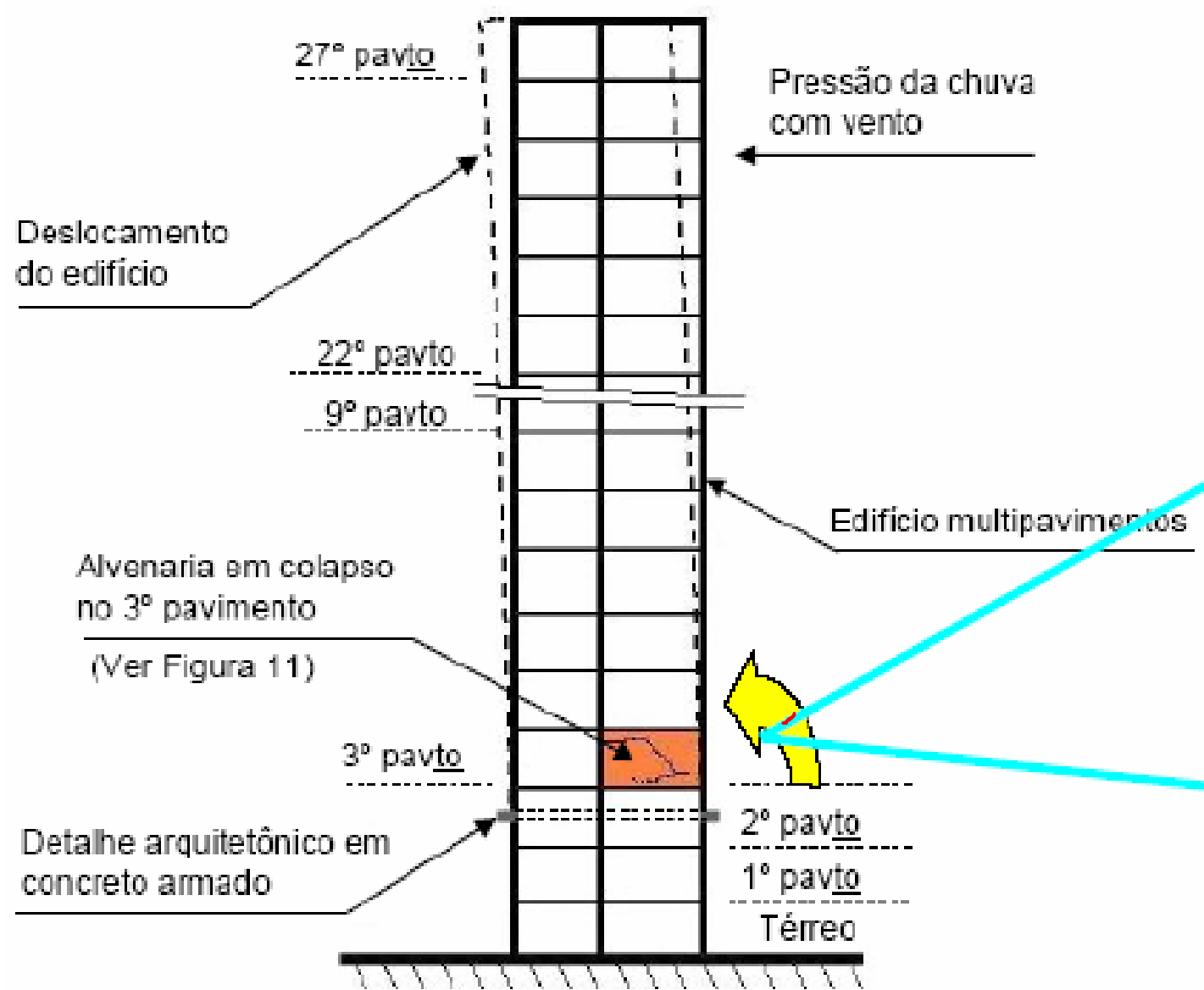




----- Situação indeformada
 ————— Situação deformada

Efeitos de 2ª ordem

- decorrentes dos deslocamentos ocasionados pelos efeitos de 1ª ordem
- são chamados efeitos de 2ª ordem



Dispensa da consideração dos efeitos globais de 2ª ordem

Coeficiente α → para edificações de **até de 4 pavimentos**

Para edificações de pequeno porte com até 4 pavimentos a NBR 6118 permite a solução aproximada através do parâmetro α

$$\alpha = H_{total} * \sqrt{\frac{N_k}{E_{cs} * I_C}}$$

H_{total} é a altura total da edificação a partir da cota de arrasamento da fundação

N_k é somatória de todas as cargas verticais na edificação com seu **valor característico**

E_{cs} é módulo de elasticidade secante do concreto

I_C é a somatória dos momentos de inércia dos pilares na direção considerada, podendo ser utilizado a rigidez de um pilar equivalente

Dispensa da consideração dos efeitos globais de 2ª ordem

O parâmetro α deve ser comparado com o valor de α_1 , que varia em função do número de pavimentos:

$$\alpha_1 = \begin{cases} 1 = 0,3 \\ 2 = 0,4 \\ 3 = 0,5 \\ \geq 4 = 0,6 \end{cases}$$

Se o valor de α for menor que o valor de α_1 a estrutura pode ser considerada de nós fixos

Caso contrário deve ser levado em consideração os esforços oriundos dos efeitos de 2ª ordem

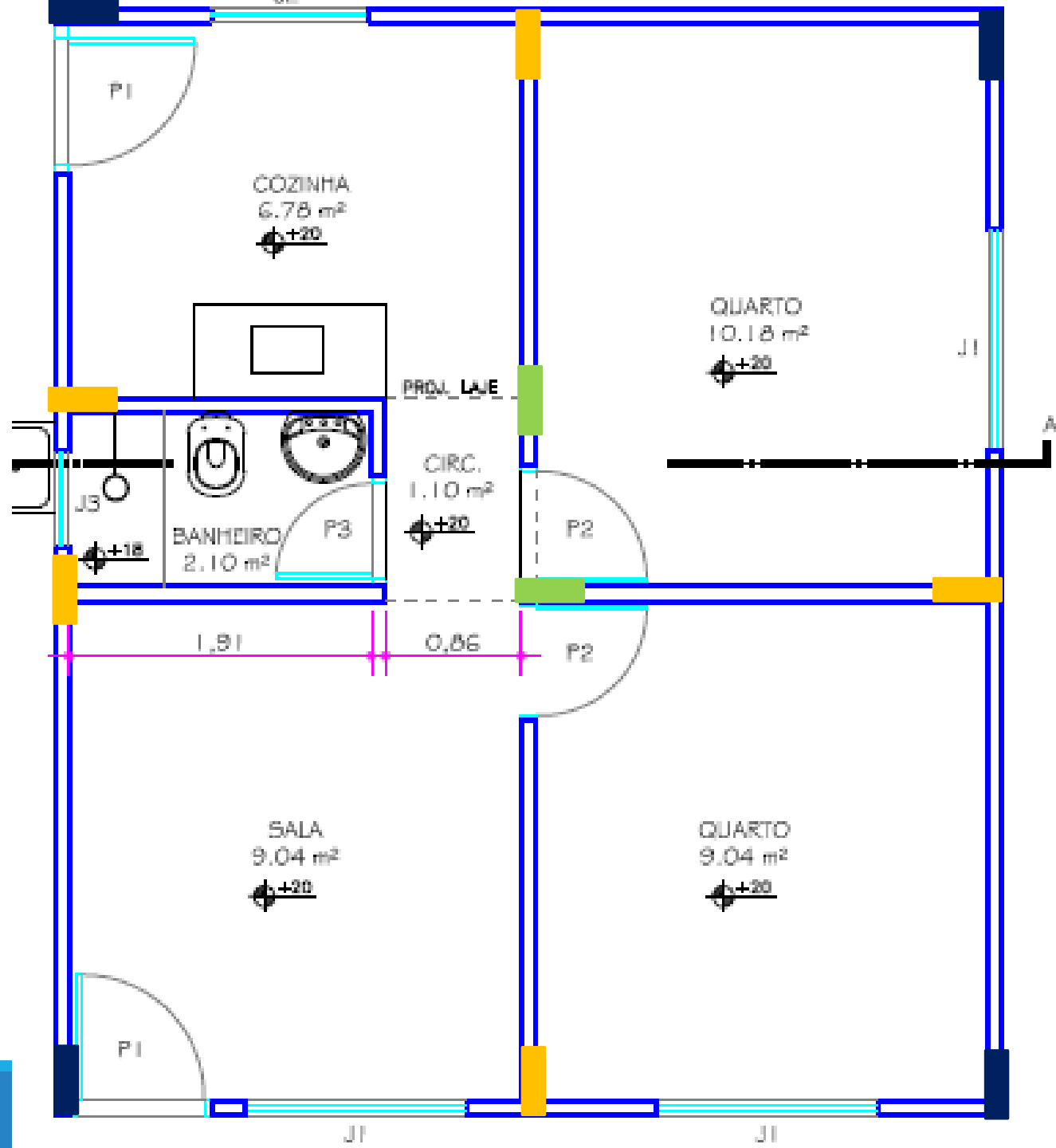
Tipos de pilares



Pilares de canto

Pilares de extremidade

Pilares internos ou intermediários



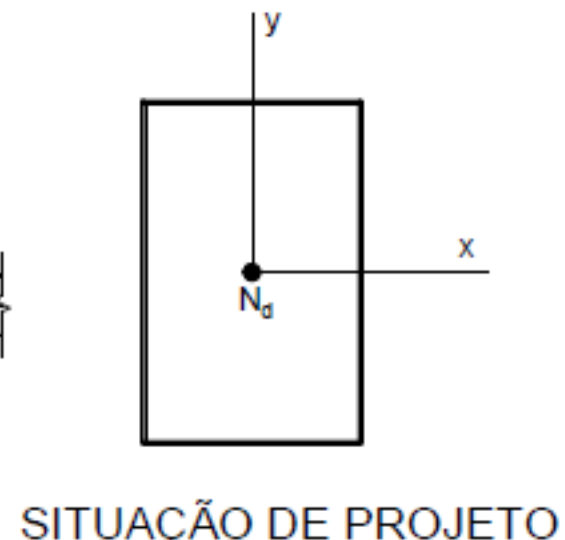
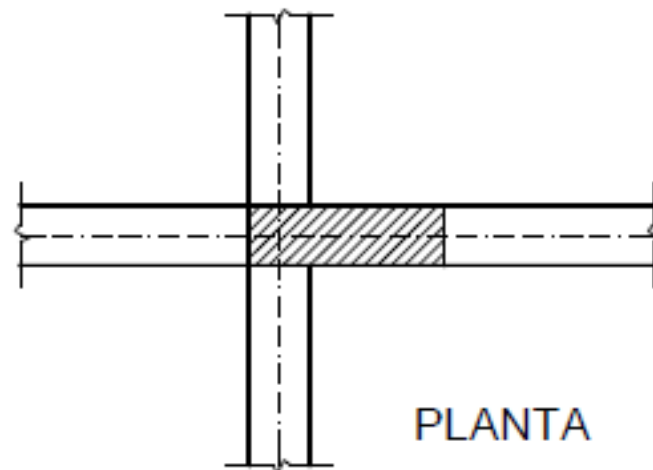
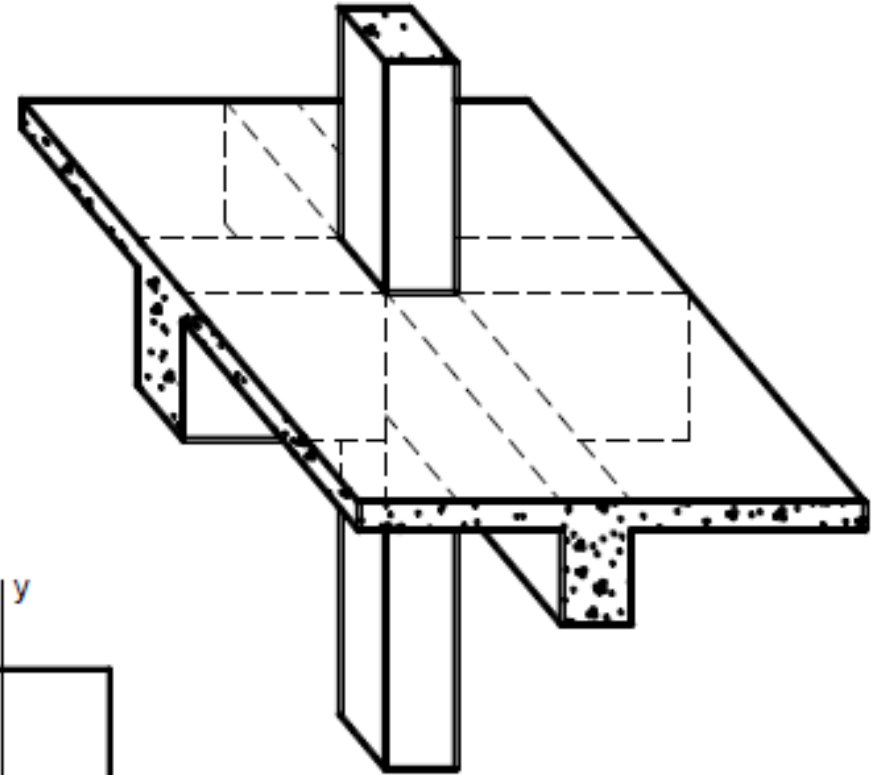
Pilar intermediário

as lajes e vigas são contínuas sobre o pilar

→ pode-se admitir que os momentos fletores transmitidos ao pilar sejam pequenos e desprezíveis

Não existem, portanto, os momentos fletores M_A e M_B de 1ª ordem nas extremidades do pilar

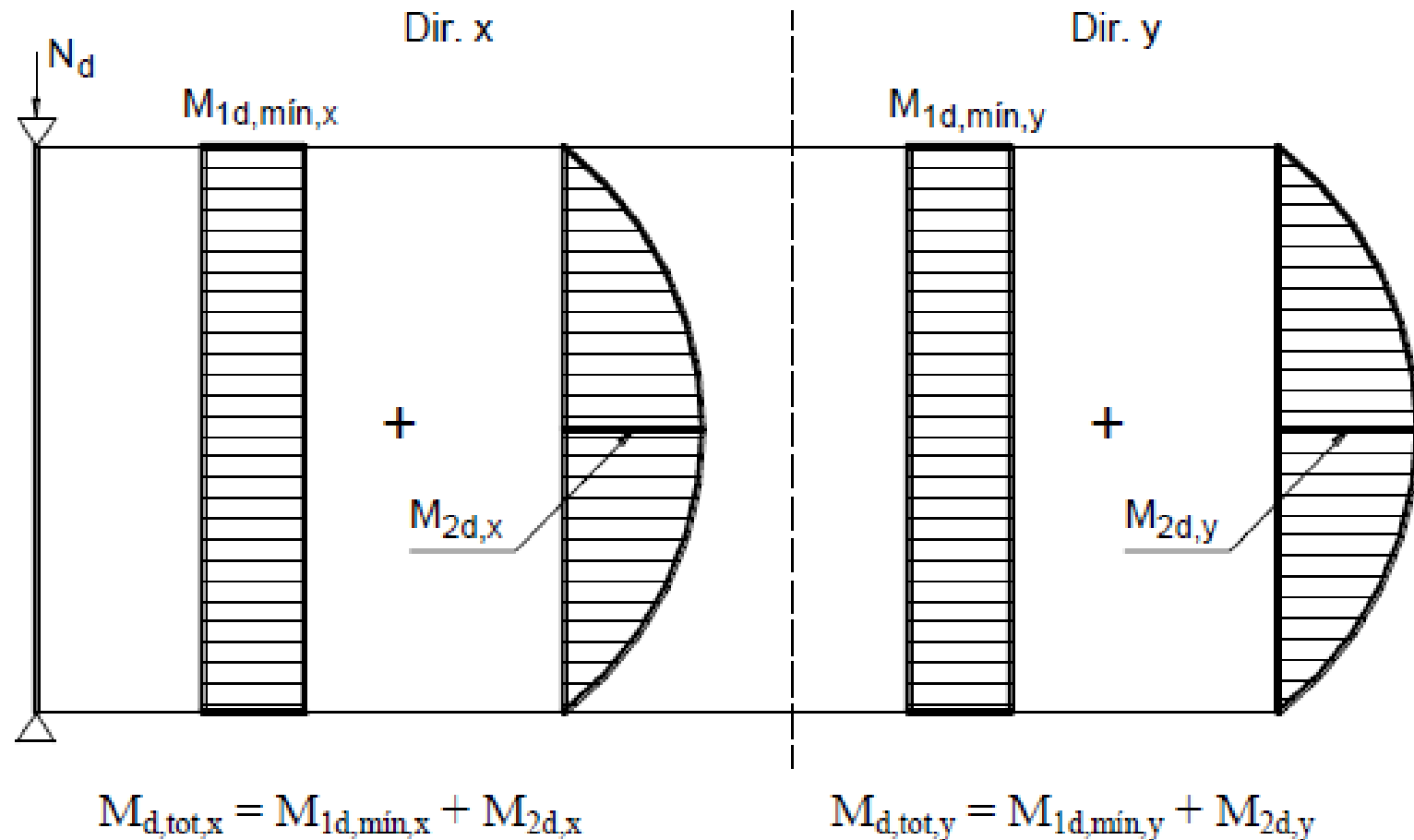
São pilares submetidos à compressão centrada



Pilar intermediário

O momento fletor mínimo ($M_{1d,\min}$) deve ser sempre considerado, nas duas direções.

O momento fletor de 2ª ordem pode ou não ocorrer, conforme a comparação entre λ e λ_1 em cada direção principal (x e y)



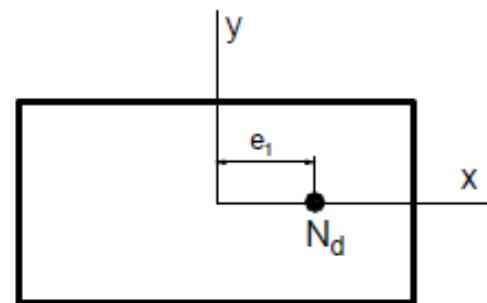
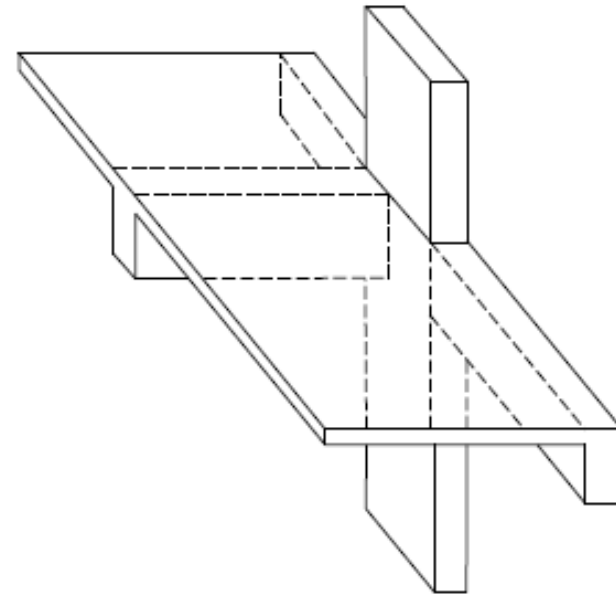
Pilar de extremidade

de modo geral, encontram-se posicionados nas **bordas das edificações**

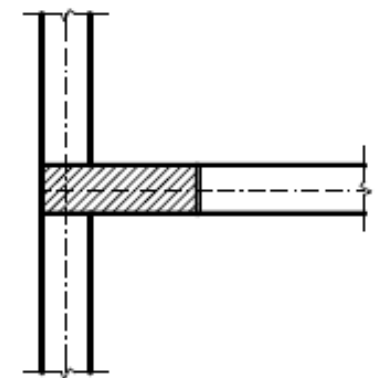
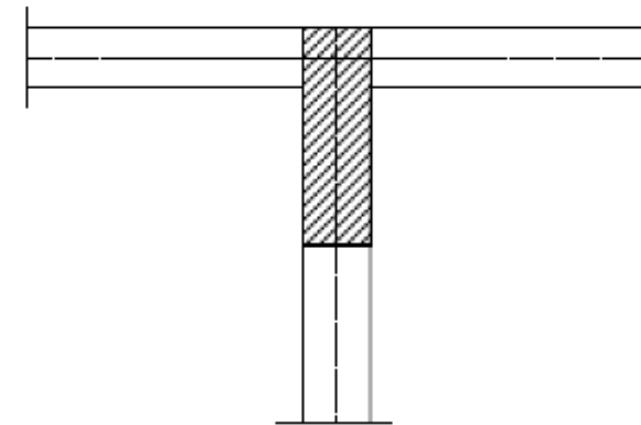
também chamados pilares laterais ou de borda

pilar ser extremo para uma viga, aquela que não tem continuidade sobre o pilar

não ocorre necessariamente na borda da edificação, ou seja, pode ocorrer na zona interior de uma edificação, desde que uma viga não apresente continuidade no pilar



SITUAÇÃO DE PROJETO



PLANTA

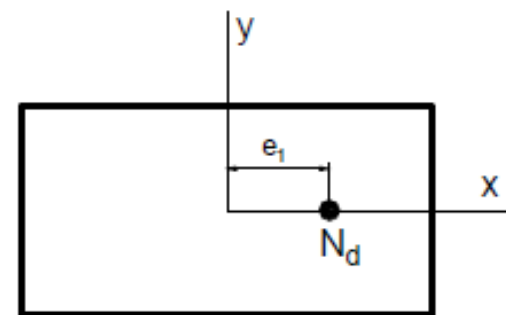
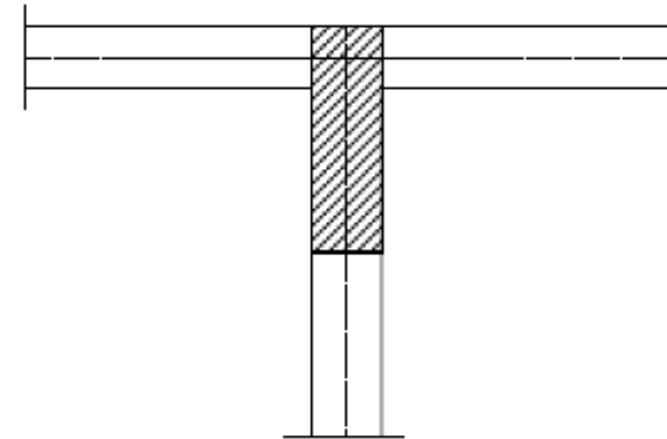
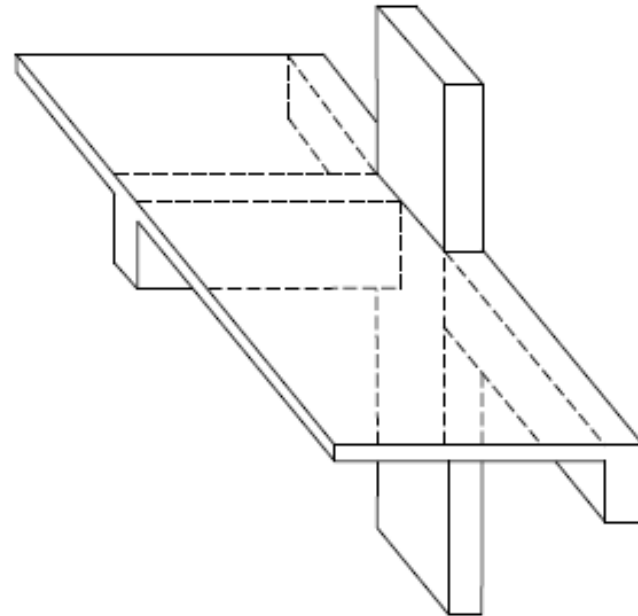
Pilar de extremidade

flexão composta normal, decorrente da não continuidade da viga

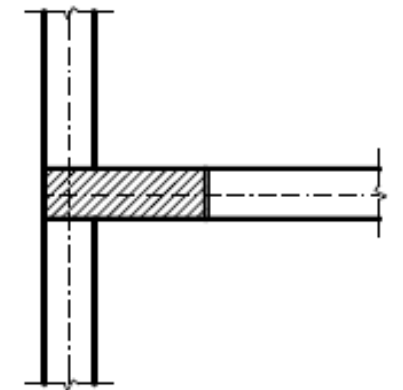
Nas seções de topo e base ocorrem **excentricidades e1 de 1ª ordem**, na direção principal x ou y do pilar:

$$e_1 = \frac{M}{N}$$

onde M pode ser o momento fletor MA ou MB, e N a força normal de compressão

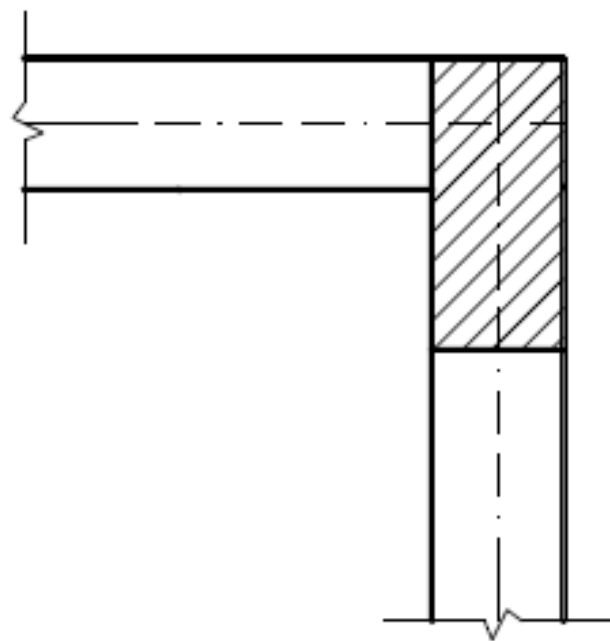
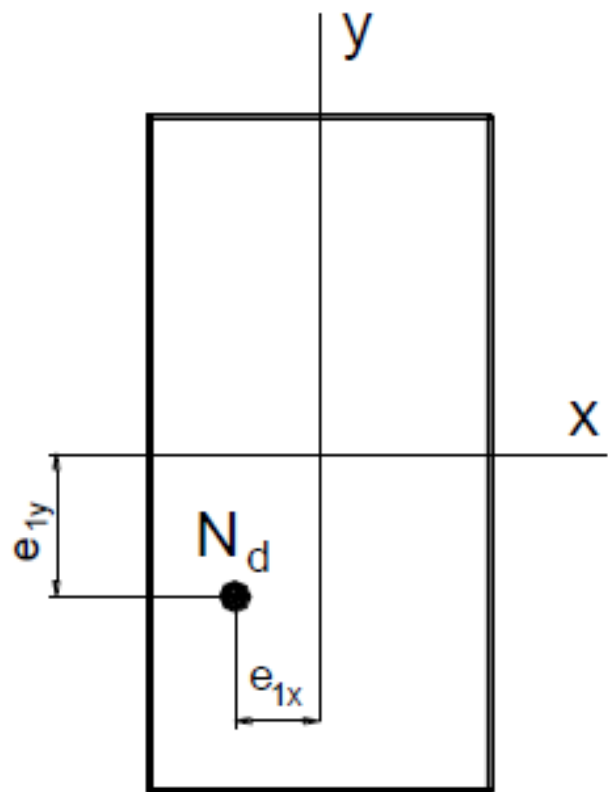


SITUAÇÃO DE PROJETO

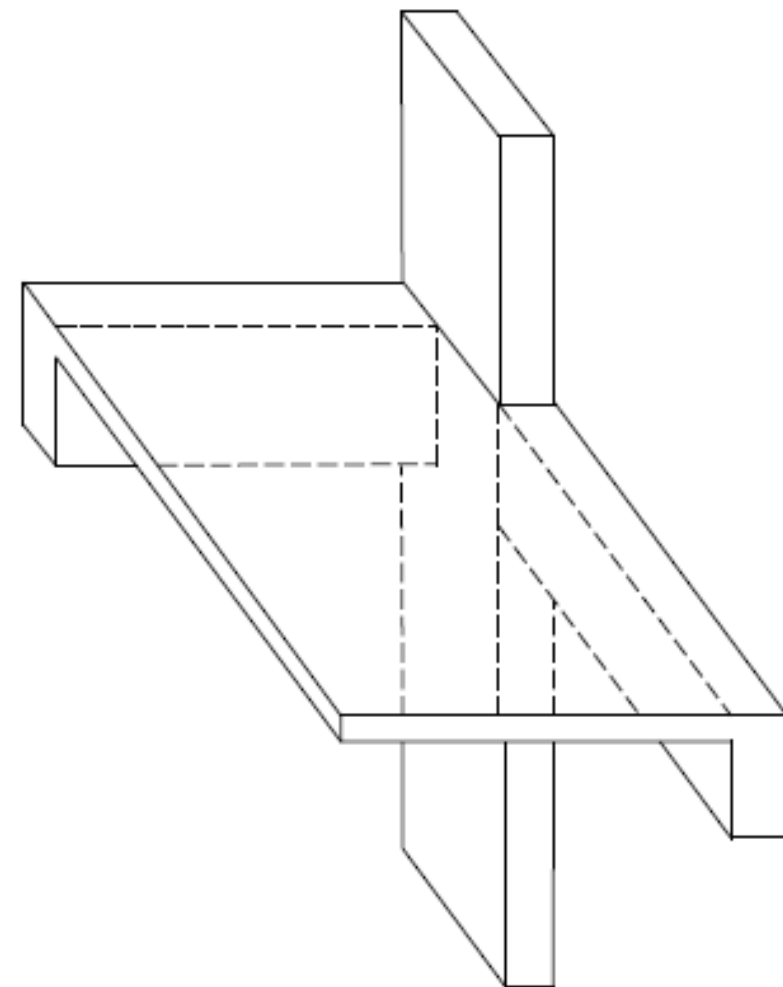


PLANTA

Pilares de canto



PLANTA



Pilares de canto

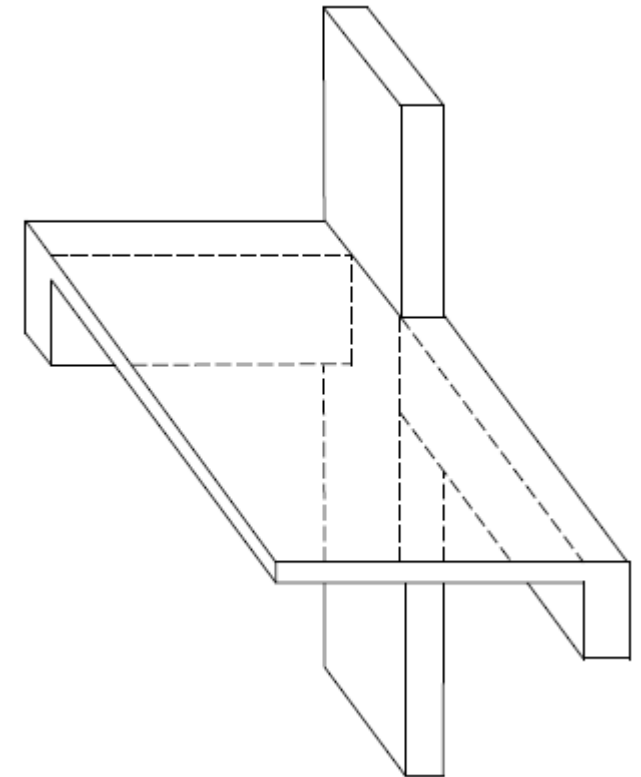
encontra-se posicionado nos cantos dos edifícios, vindo daí o nome

ocorre a ***Flexão Composta Oblíqua (FCO)***, decorrente da não continuidade de duas vigas no pilar

o pilar é um apoio extremo para duas vigas.

os momentos fletores M_A e M_B de 1ª ordem, nas duas direções principais do pilar, e conseqüentemente ocorrem as excentricidades de 1ª ordem e_{1x} e e_{1y} , simultaneamente.

Os momentos fletores M_A e M_B podem ser calculados da forma como apresentado nos pilares de extremidade, ou da análise de pórtico plano ou espacial.



Dimensionamento de pilares intermediários

Hipóteses

As hipóteses básicas consideradas no dimensionamento de vigas à Flexão Simples são também consideradas na FCN:

- a seção permanece plana após a deformação
- existe aderência entre o aço e o concreto
- a resistência do concreto à tração é desprezada
- o diagrama retangular simplificado com altura y pode ser adotado para a distribuição de tensões de compressão no concreto
- a tensão no aço pode ser obtida com o diagrama tensão x deformação
- o Estado-Limite Último é caracterizado em um dos domínios de deformações

Roteiro para pilares

1. Força normal solicitante de projeto

$$N_{sd} = \gamma_n * \gamma_f * N_k$$

sendo

N_{sd} Força normal solicitante de projeto

γ_n coeficiente de majoração em função da menor dimensão da seção transversal do pilar

γ_f coeficiente de segurança

N_k força normal característica

b	≥ 19	18	17	16	15	14
γ_n	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25

Nota: O coeficiente γ_n deve majorar os esforços solicitantes finais de cálculo quando de seu dimensionamento.

$\gamma_n = 1,95 - 0,05 b$
 b = menor dimensão da seção transversal (cm).

Combinações de ações	Ações							
	Permanentes (g)		Variáveis (q)		Protensão (p)		Recalques de apoio e retração	
	D	F	G	T	D	F	D	F
Normais	1,4 ^a	1,0	1,4	1,2	1,2	0,9	1,2	0
Especiais ou de construção	1,3	1,0	1,2	1,0	1,2	0,9	1,2	0
Excepcionais	1,2	1,0	1,0	0	1,2	0,9	0	0

Exemplo 1

Dimensionar a armadura longitudinal do pilar mostrado na Figura abaixo, sendo conhecidos:

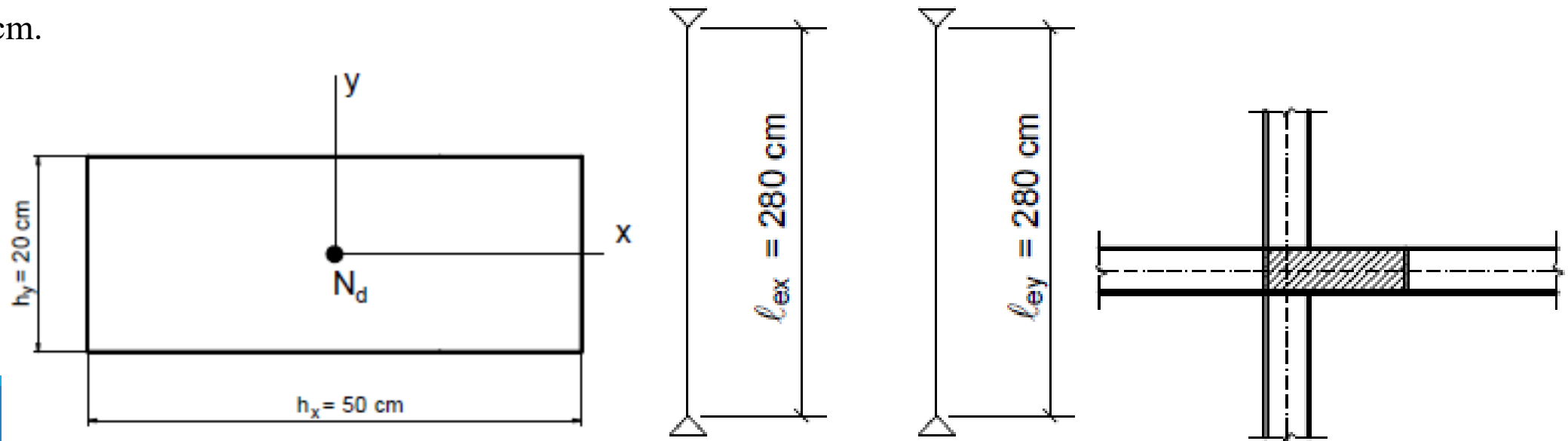
$N_k = 1.000 \text{ kN}$ (100 tf) ;

seção transversal 20 x 50 ($A_c = 1.000 \text{ cm}^2$) ;

comprimento equivalente (de flambagem): $l_{ex} = l_{ey} = 280 \text{ cm}$;

concreto C30;

$d' = 4,0 \text{ cm}$.



Resolução

1. Força normal

$$N_{sd} = \gamma_n * \gamma_f * N_k$$

$$N_{sd} = 1 * 1,4 * 1000$$

$$N_{sd} = 1400 \text{ kN}$$

b	≥ 19	18	17	16	15	14
γ_n	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25

Nota: O coeficiente γ_n deve majorar os esforços solicitantes finais de cálculo quando de seu dimensionamento.
 $\gamma_n = 1,95 - 0,05 b$
b = menor dimensão da seção transversal (cm).

Combinações de ações	Ações							
	Permanentes (g)		Variáveis (q)		Protensão (p)		Recalques de apoio e retração	
	D	F	G	T	D	F	D	F
Normais	1,4 ^a	1,0	1,4	1,2	1,2	0,9	1,2	0
Especiais ou de construção	1,3	1,0	1,2	1,0	1,2	0,9	1,2	0
Excepcionais	1,2	1,0	1,0	0	1,2	0,9	0	0

Índice de esbeltez

é a razão entre o *comprimento equivalente* (de flambagem) e o *raio de giração*, nas direções a serem consideradas (NBR 6118, 15.8.2)

Para pilares de qualquer seção

$$\lambda = \frac{l_e}{i} \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

l_e = comprimento equivalente;

i = raio de giração da seção geométrica da peça

I = momento de inércia;

A = área da seção;

h = dimensão do pilar na direção considerada.

Roteiro para pilares

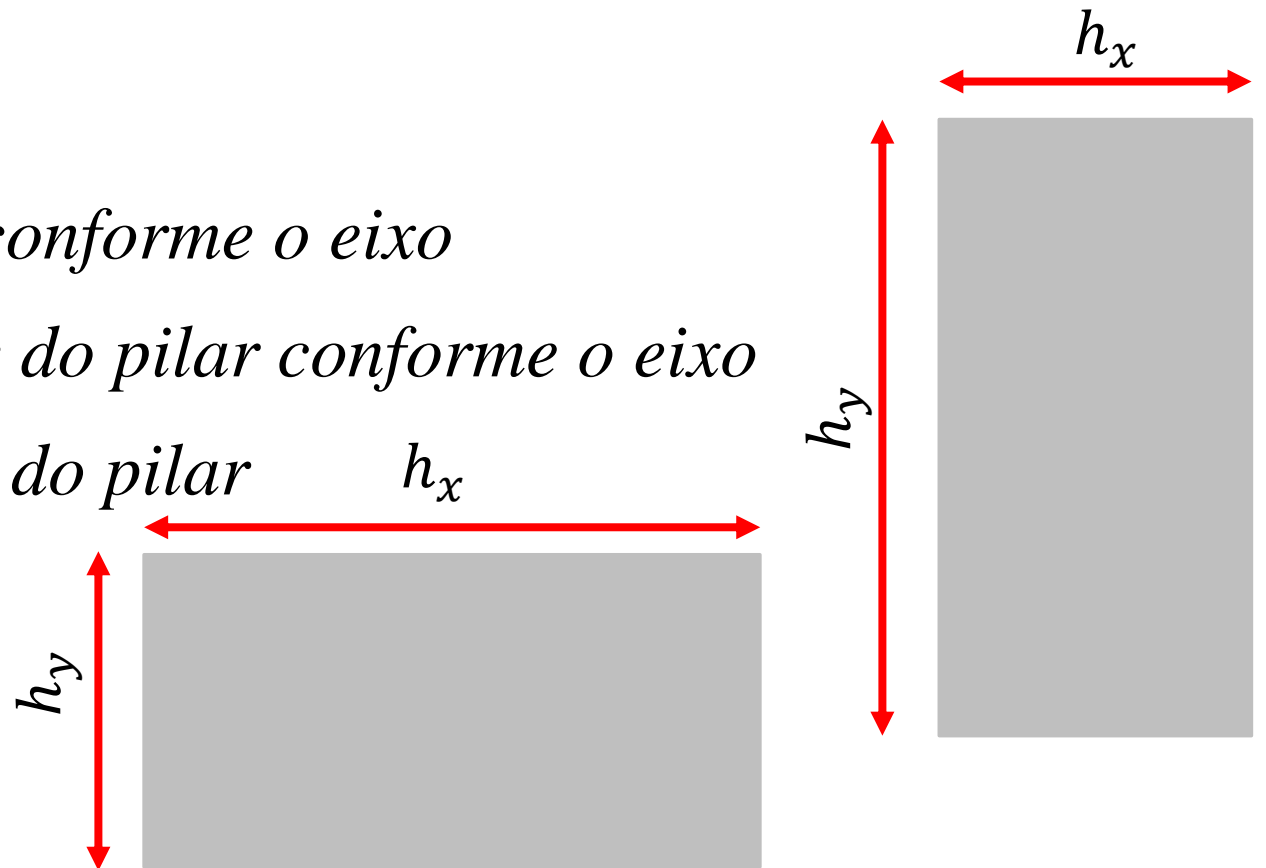
2. Índice de esbeltez

$$\lambda = \frac{\sqrt{12} l_e}{h} = \lambda = \frac{3,46 * l_e}{h}$$

λ índice de esbeltez do pilar conforme o eixo

l_e o comprimento equivalente do pilar conforme o eixo

h altura da seção transversal do pilar



Exemplo 1

Dimensionar a armadura longitudinal do pilar mostrado na Figura abaixo, sendo conhecidos:

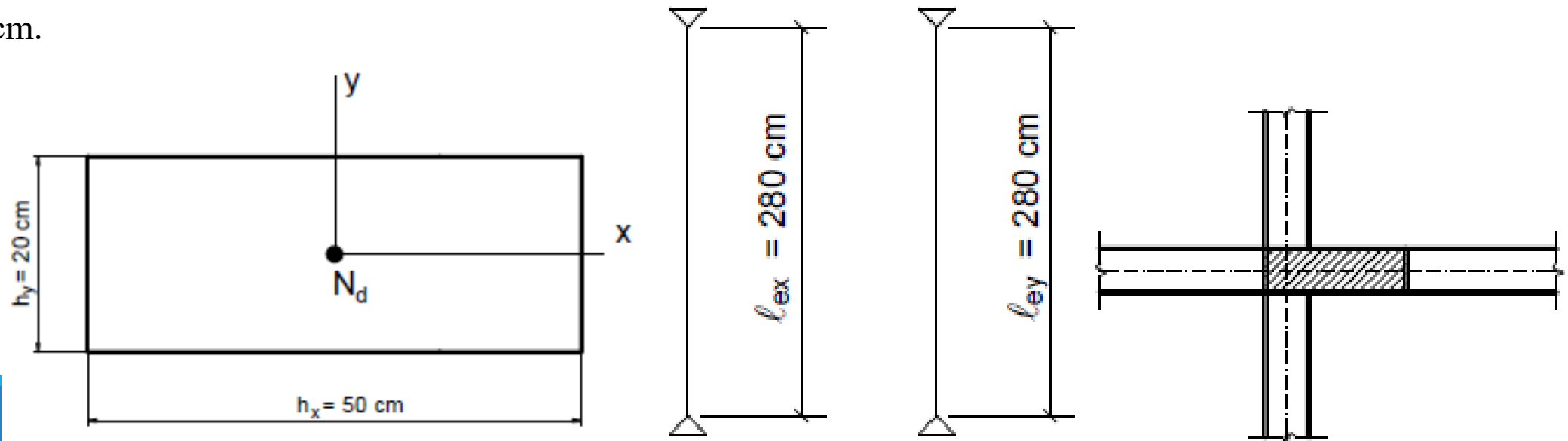
$N_k = 1.000 \text{ kN}$ (100 tf) ;

seção transversal 20 x 50 ($A_c = 1.000 \text{ cm}^2$) ;

comprimento equivalente (de flambagem): $l_{ex} = l_{ey} = 280 \text{ cm}$;

concreto C30;

$d' = 4,0 \text{ cm}$.



Resolução

2. índice de esbeltez

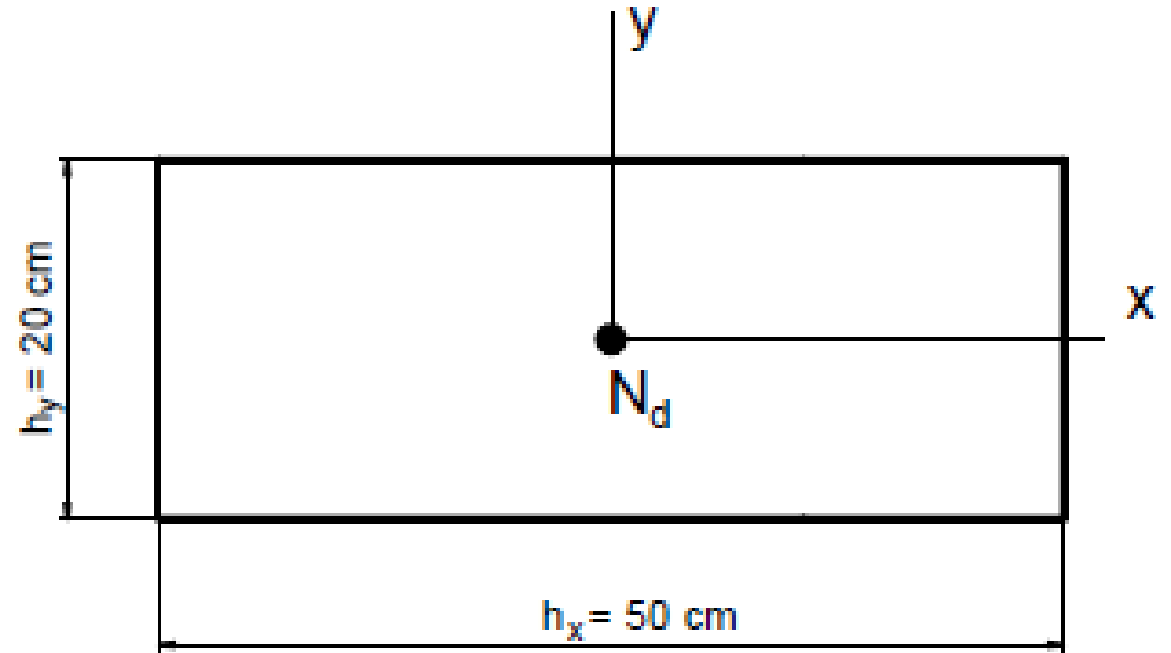
$$\lambda = \frac{3,46 \cdot l_e}{h}$$

Em x:

$$\lambda_x = \frac{3,46 \cdot l_{ex}}{h_x}$$

$$\lambda_x = \frac{3,46 \cdot 280}{50}$$

$$\lambda_x = 19,37$$



Resolução

2. índice de esbeltez

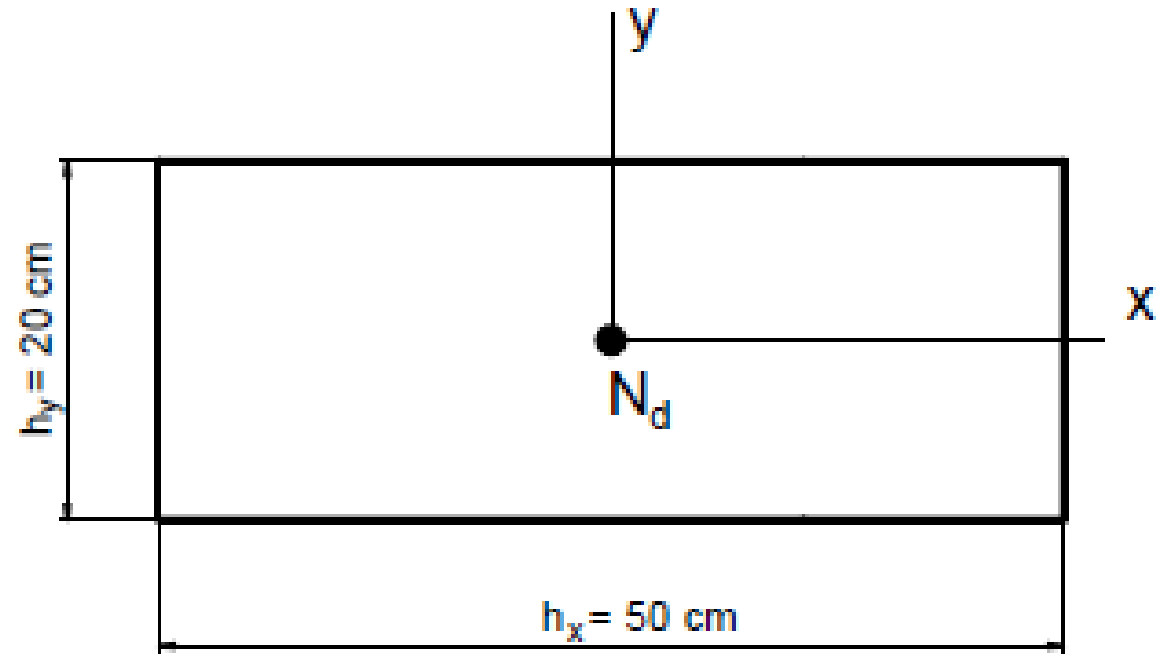
$$\lambda = \frac{3,46 \cdot l_e}{h}$$

Em y:

$$\lambda_y = \frac{3,46 \cdot l_{ey}}{h_y}$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 \cdot 280}{20}$$

$$\lambda_y = 48,44$$



Esbeltez limite (λ_1)

valor de λ_1 depende de diversos fatores, mas os preponderantes são:

- a excentricidade relativa de 1ª ordem e_1/h na extremidade do pilar onde ocorre o momento de 1ª ordem de maior valor absoluto;
- a vinculação dos extremos da coluna isolada;
- a forma do diagrama de momentos de 1ª ordem.”

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}$$

$35 \leq \lambda_1 \leq 90$,

onde: e_1 = excentricidade de 1ª ordem (não inclui a excentricidade acidental e_a);

e_1/h = excentricidade relativa de 1ª ordem.

Roteiro para pilares

4. Esbeltez limite

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}, \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

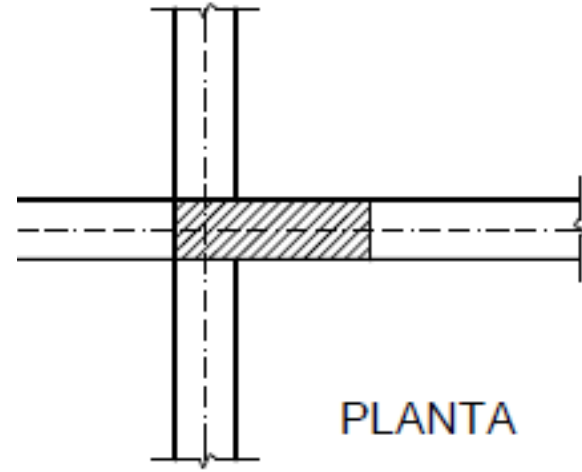
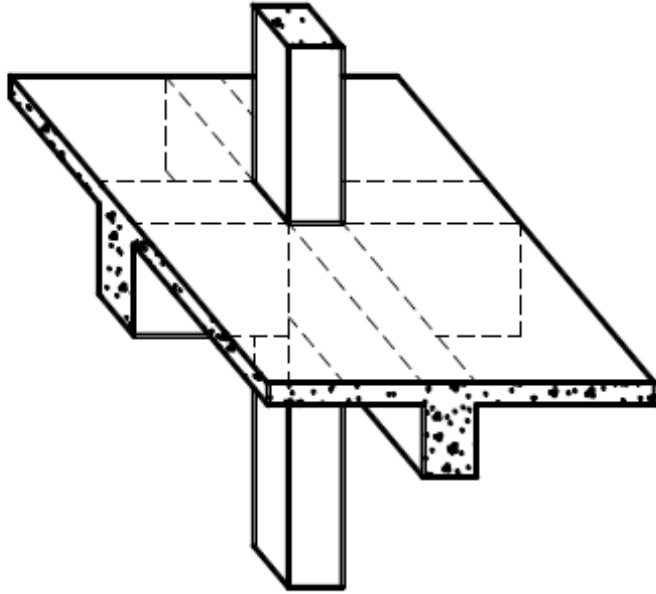
Caso

$\lambda \leq \lambda_1 \rightarrow$ **NÃO SE CONSIDERA** o efeito local de 2ª ordem na direção considerada

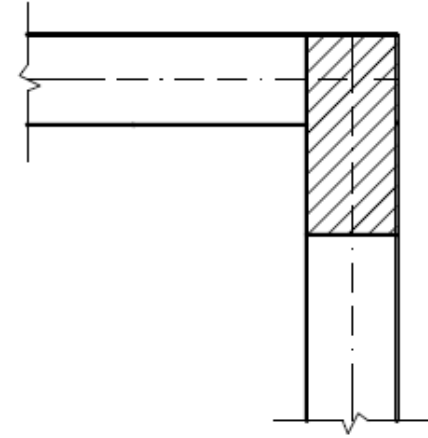
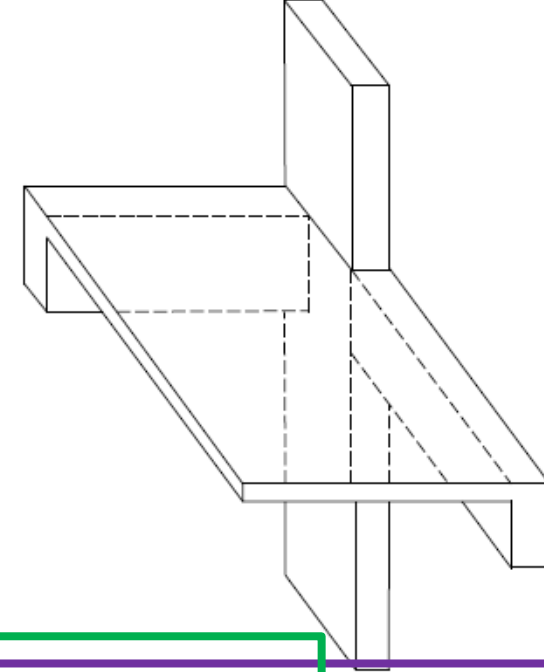
$\lambda > \lambda_1 \rightarrow$ **SE CONSIDERA** o efeito local de 2ª ordem na direção considerada

$$e_1 \begin{cases} = 0 \text{ para intermediários} \\ \neq 0 \text{ para pilares de extremidade na direção em que não há continuidade de viga} \\ \neq 0 \text{ para pilares de canto em ambas direções por conta da não continuidade de viga} \end{cases}$$

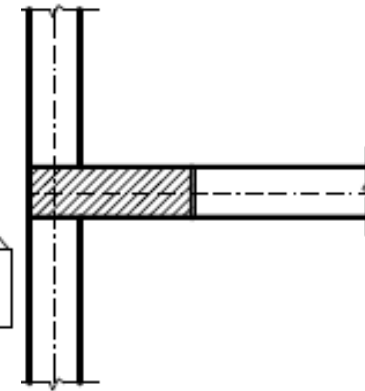
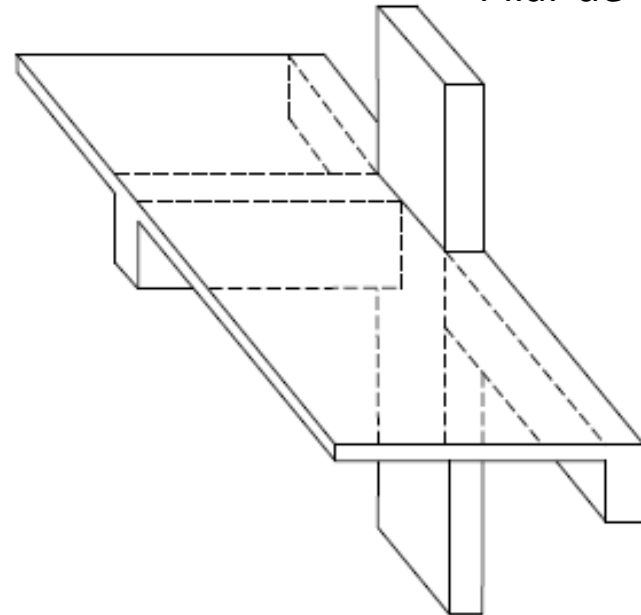
Pilar intermediário



Pilar de canto



Pilar de extremidade

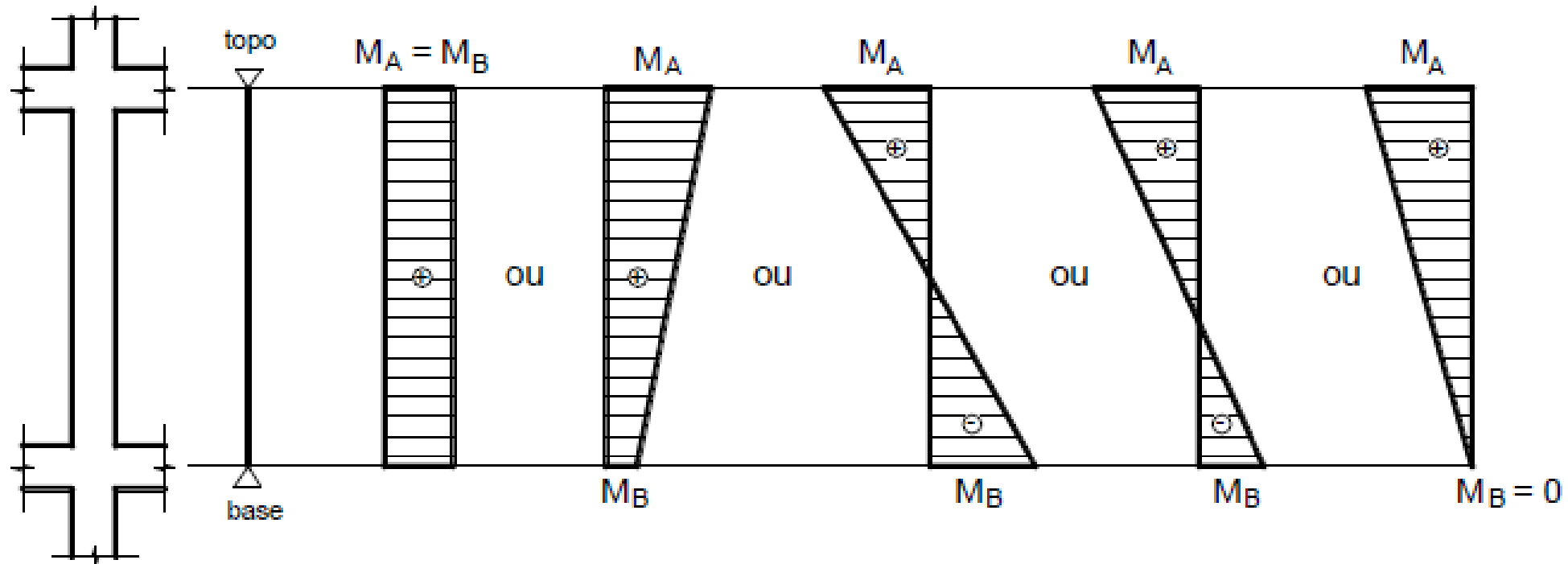


a) para pilares biapoiados sem cargas transversais:

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} \geq 0,4$$

$$0,4 \leq \alpha_b \leq 1,0$$

MA e MB são os momentos de 1a ordem nos extremos do pilar, obtidos na análise de 1a ordem no caso de estruturas de nós fixos e os momentos totais (1a ordem + 2a ordem global) no caso de estruturas de nós móveis. Deve ser adotado para MA o maior valor absoluto ao longo do pilar biapoiado e para MB o sinal positivo, se tracionar a mesma face que MA, e negativo, em caso contrário.



B) para pilares biapoiados com cargas transversais significativas ao longo da altura:

$$\alpha_b = 1,0$$

C) para pilares em balanço:

$$\alpha_b = 0,8 + 0,2 \frac{M_C}{M_A} \quad , e \quad 0,85 \leq \alpha_b \leq 1,0$$

M_A = momento de 1ª ordem no engaste;

M_C = momento de 1ª ordem no meio do pilar em balanço.

D) para pilares biapoiados ou em balanço com momentos fletores menores que o momento fletor mínimo

$$\alpha_b = 1,0$$

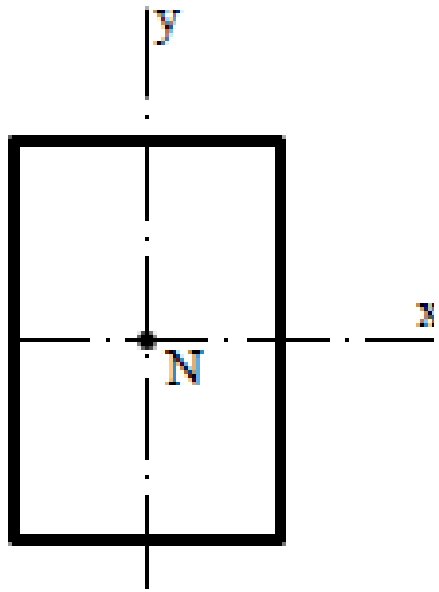
Excentricidade de 1ª ordem (e_1)

devido aos esforços solicitantes de 1ª ordem, que são aqueles existentes na estrutura **não deformada**

pode ocorrer devido à existência de momentos fletores solicitantes ao longo do lance do pilar, independentes da força normal

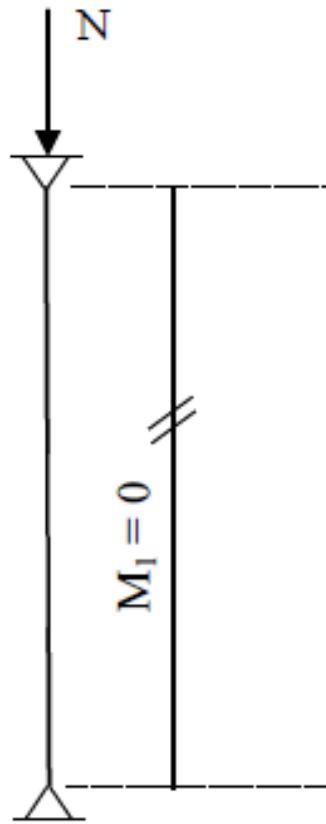
Ou devido ao ponto teórico de aplicação da força normal não coincidir com o centro de gravidade (CG) da seção transversal, ou seja, quando existe uma excentricidade inicial (**a**).

Excentricidade de 1ª ordem (e_1)

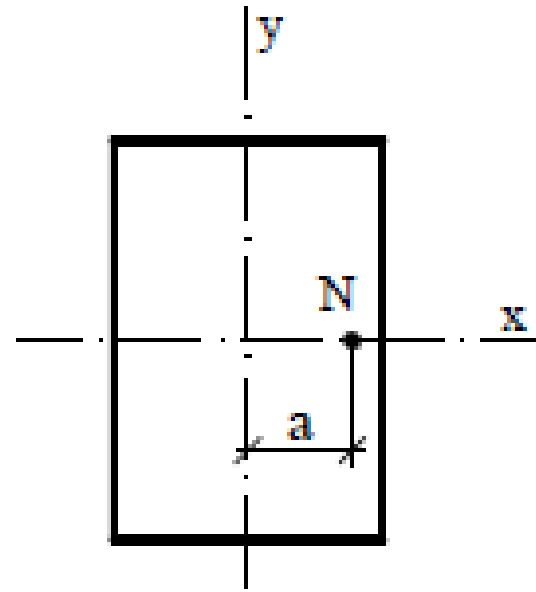


N suposta centrada e $M = 0$

$$e_1 = 0$$

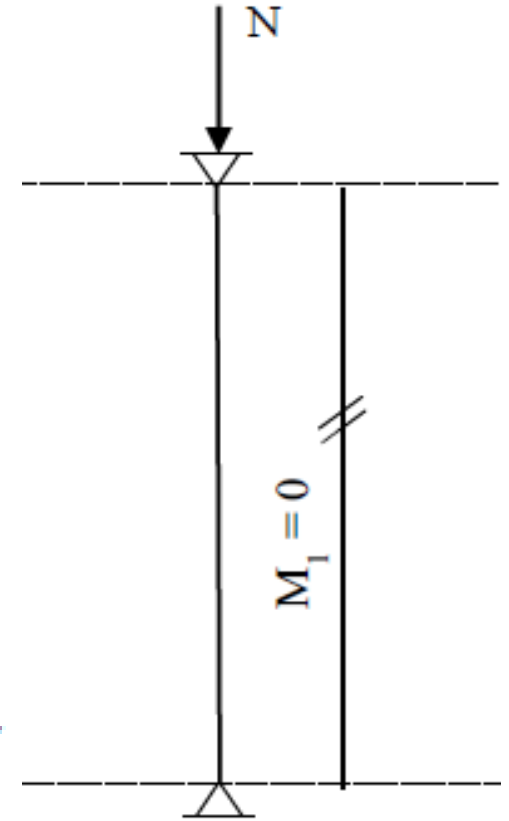


a) N suposta centrada e $M_1 = 0$ ($e_1 = 0$);



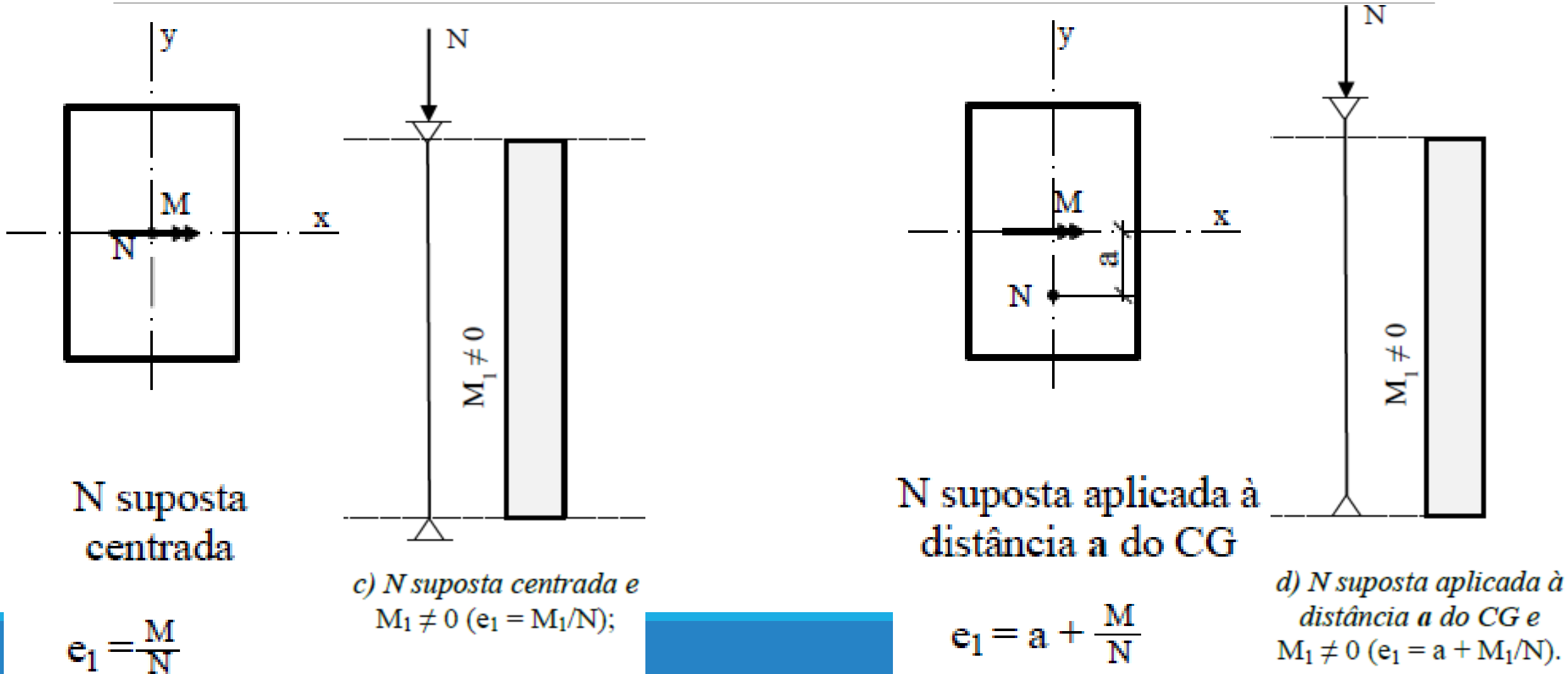
N suposta aplicada à distância a do CG, $M = 0$

$$e_1 = a$$



b) N suposta aplicada à distância a do CG e $M_1 = 0$ ($e_1 = a$);

Excentricidade de 1ª ordem (e_1)



Classificação de pilares conforme o índice de esbeltez

Curto $\lambda_1 \leq 35$	Médio $35 < \lambda_1 \leq 90$	Medianamente esbelto $90 < \lambda_1 \leq 140$	Esbelto: se $140 < \lambda_1 \leq 200$
<ul style="list-style-type: none">não há necessidade de considerar efeitos de segunda ordem	<ul style="list-style-type: none">considerar efeitos de locais segunda ordem	<ul style="list-style-type: none">efeitos de segunda ordem são importantes e não podem ser desprezados	<ul style="list-style-type: none">efeitos de segunda ordem são importantes e não podem ser desprezados

Os pilares curtos e médios ($\lambda_1 \leq 90$) representam a grande maioria dos pilares das edificações. Os pilares medianamente esbeltos e esbeltos são pouco frequentes.

Sendo λ a esbeltez do pilar dada por:

$$\lambda = \frac{\sqrt{12} l_e}{h} = \frac{3,46 l_e}{h}$$

Exigências da NBR 6118 no projeto de pilares conforme o índice de esbeltez.

Índice de Esbeltez (λ)	Consideração dos Efeitos Locais de 2ª Ordem	Métodos de Cálculo			
		Método Geral	Métodos Aproximados do Pilar-Padrão		
			Com Curvatura Aproximada	Com Rigidez Aproximada	Acoplado a Diagrama M, N, 1/r
$140 < \lambda \leq 200$	Obrigatória	Obrigatório	Não Permitido	Não Permitido	Não Permitido
$90 < \lambda \leq 140$	Obrigatória	–	Não Permitido	Não Permitido	Permitido
$\lambda_1 < \lambda \leq 90$	Obrigatória	–	Permitido	Permitido	–
$0 < \lambda \leq \lambda_1$	–	–	–	–	–

O dimensionamento de pilares esbeltos e medianamente esbeltos ($\lambda > 90$) é feito por meio do Método geral e o método aproximado do pilar padrão acoplado com diagrama M, N, 1/r necessitam do uso de softwares computacionais

Exemplo 1

Dimensionar a armadura longitudinal do pilar mostrado na Figura abaixo, sendo conhecidos:

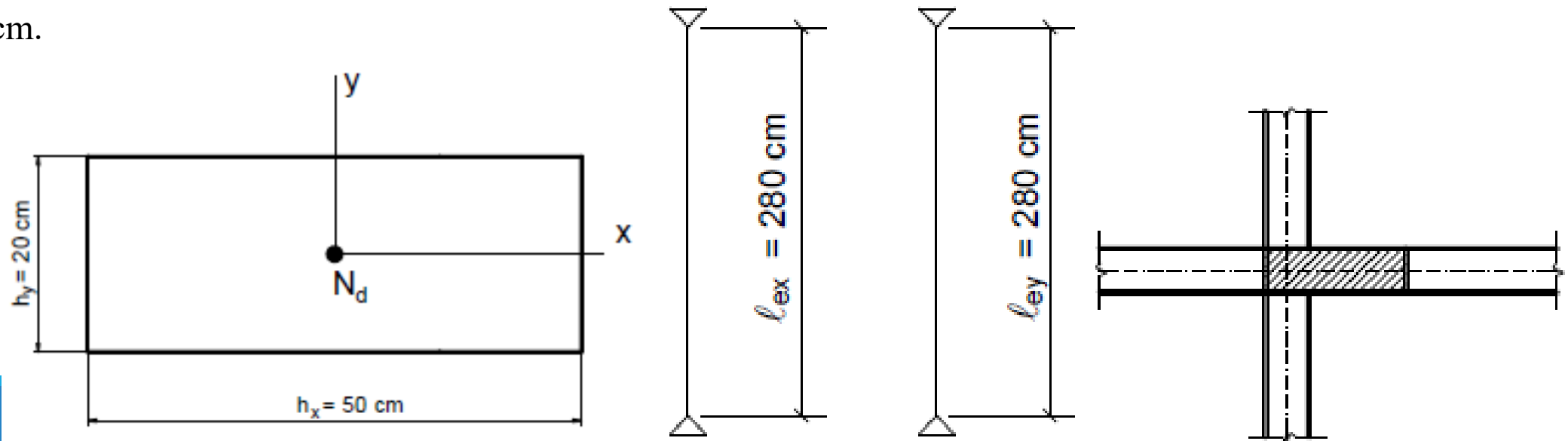
$N_k = 1.000 \text{ kN}$ (100 tf) ;

seção transversal 20 x 50 ($A_c = 1.000 \text{ cm}^2$) ;

comprimento equivalente (de flambagem): $l_{ex} = l_{ey} = 280 \text{ cm}$;

concreto C30;

$d' = 4,0 \text{ cm}$.



Resolução

4. esbeltez limite

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 * \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}, \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Em x:

$$\lambda_{1x} = \frac{25 + 12,5 * \frac{e_1}{h_x}}{\alpha_b}$$

Como o pilar é intermediário:

$$e_1 = 0$$

E “para pilares biapoiados ou em balanço com momentos fletores menores que o momento fletor mínimo” ($M_{1dA} < M_{1dmín x}$)

$$M_{1dA} = 0 \text{ e } M_{1dmín x} = 4200 \text{ kN.cm} \rightarrow \alpha_b = 1$$

Resolução

4. esbeltez limite

$$\lambda_{1x} = \frac{25 + 12,5 * \frac{0}{50}}{1}$$

$$\lambda_{1x} = 25$$

Como $35 \leq \lambda_1 \leq 90$

$$\rightarrow \lambda_{1x} = 35$$

Como $\lambda_x = 19,37 \leq \lambda_{1x} = 35$

→ não se considera o efeito local de 2ª ordem na direção considerada

Resolução

4. esbeltez limite

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 * \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}, \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Em y:

$$\lambda_{1y} = \frac{25 + 12,5 * \frac{e_1}{h_y}}{\alpha_b}$$

Como o pilar é intermediário:

$$e_1 = 0$$

E “para pilares biapoiados ou em balanço com momentos fletores menores que o momento fletor mínimo”

$$M_{1dA} = 0 \text{ e } M_{1d\text{mín } y} = 2940 \text{ kN.cm} \rightarrow \alpha_b = 1$$

Resolução

4. esbeltez limite

$$\lambda_{1y} = \frac{25 + 12,5 * \frac{0}{20}}{1}$$

$$\lambda_{1y} = 25$$

Como $35 \leq \lambda_1 \leq 90$

$$\rightarrow \lambda_{1y} = 35$$

Como $\lambda_y = 48,44 > \lambda_{1y} = 35$

→ se considera o efeito local de 2ª ordem na direção considerada

Roteiro para pilares

Momento fletor mínimo

$$M_{1d,mín} = N_{sd} * (1,5 + (0,03 * h))$$

$M_{1d,mín}$ momento fletor mínimo de 1ª ordem de projeto

N_{sd} força normal solicitante de projeto

h altura da seção transversal do pilar em cm na direção considerada

PILARES INTERMEDIÁRIOS POR MAIS QUE ESTEJAM SOB COMPRESSÃO CENTRADA, DEVEM SEMPRE SER DIMENSIONADOS À FLEXO-COMPRESSÃO SEGUNDO NBR 6118/2014

Excentricidade mínima

A NBR 6118 adota a mesma formulação do CEB/90 para a consideração das imperfeições geométricas.

Porém, ela exige uma consideração de uma excentricidade de primeira ordem mínima dada por:

$$e_{1,mín} = 1,5 + (0,03 * h), \text{ cm}$$

Ou

$$e_{1,mín} = M_{1d,mín} / N_{sd}$$

Exemplo 1

Dimensionar a armadura longitudinal do pilar mostrado na Figura abaixo, sendo conhecidos:

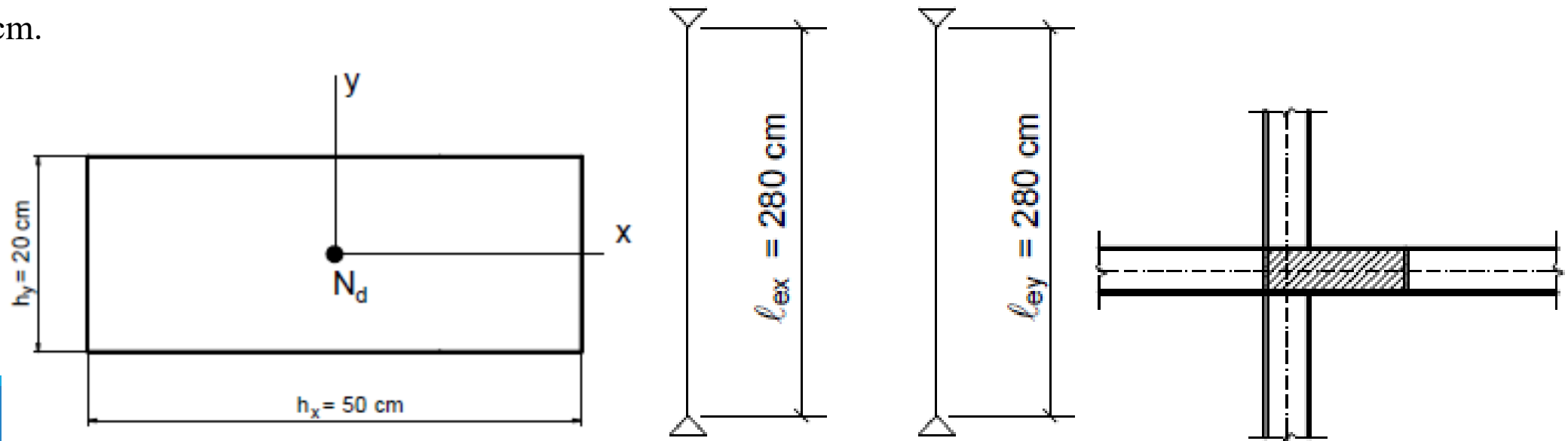
$N_k = 1.000 \text{ kN}$ (100 tf) ;

seção transversal 20 x 50 ($A_c = 1.000 \text{ cm}^2$) ;

comprimento equivalente (de flambagem): $l_{ex} = l_{ey} = 280 \text{ cm}$;

concreto C30;

$d' = 4,0 \text{ cm}$.



Resolução

3. momento fletor mínimo

$$M_{1d,mín} = N_{sd} * (1,5 + (0,03 * h))$$

Em x:

$$M_{1d,mín x} = N_{sd} * (1,5 + (0,03 * h_x))$$

$$M_{1d,mín x} = 1400 * (1,5 + (0,03 * 50))$$

$$M_{1d,mín x} = 4200 \text{ kN.cm}$$

$$e_{1x,mín} = \frac{M_{1d,mín x}}{N_{sd}}$$

$$e_{1x,mín} = \frac{4200}{1400}$$

$$e_{1x,mín} = 3 \text{ cm}$$

Resolução

3. momento fletor mínimo

$$M_{1d,mín} = N_{sd} * (1,5 + (0,03 * h))$$

Em y:

$$M_{1d,mín y} = N_{sd} * (1,5 + (0,03 * h_y))$$

$$M_{1d,mín y} = 1400 * (1,5 + (0,03 * 20))$$

$$M_{1d,mín y} = 2940 \text{ kN.cm}$$

$$e_{1y, mín} = \frac{M_{1d,mín y}}{N_{sd}}$$

$$e_{1y, mín} = \frac{2940}{1400}$$

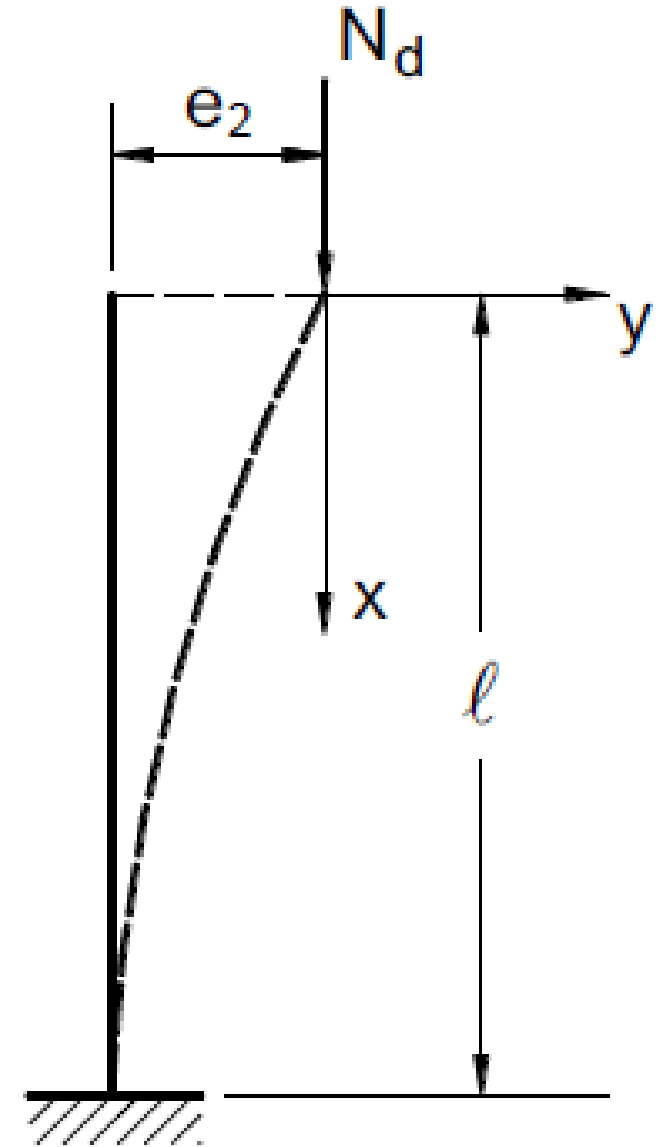
$$e_{1y, mín} = 2,1 \text{ cm}$$

Pilar-padrão

O **pilar-padrão** é uma simplificação do chamado *Método Geral*, sendo definido como um pilar em balanço (engastado na base e livre no topo), com uma curvatura conhecida que origina no topo o deslocamento horizontal de valor

o método do pilar-padrão é aplicável somente a **pilares de seção transversal constante e armadura constante em todo o comprimento do pilar**

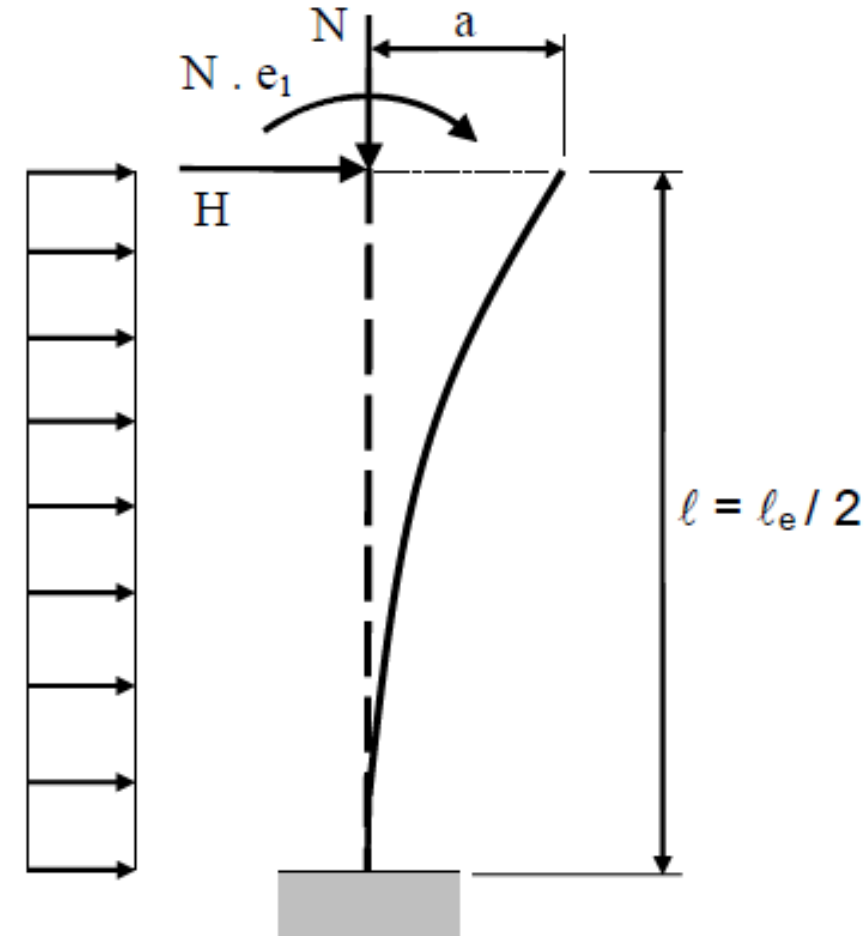
a não linearidade geométrica é considerada de forma aproximada supondo-se que a deformação da barra seja senoidal



Pilar padrão com curvatura aproximada

O **pilar-padrão** é uma simplificação do chamado *Método Geral*, sendo definido como um pilar em balanço (engastado na base e livre no topo), com uma curvatura conhecida que origina no topo o deslocamento horizontal de valor

$$a = \frac{\ell_e^2}{10} \left(\frac{1}{r} \right)_{\text{base}}$$



Método do pilar padrão com curvatura aproximada

Pode ser empregado apenas no cálculo de pilares com $\lambda \leq 90$, com seção constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo.

A não linearidade geométrica é considerada de forma aproximada, supondo-se que a deformação da barra seja senoidal.

A não linearidade física é considerada através de uma expressão aproximada da curvatura na seção crítica.

$$M_{2d} = N_d \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r}$$

N_d = força normal solicitante de cálculo;

ℓ_e = comprimento equivalente;

$1/r$ = curvatura na seção crítica, avaliada pela expressão aproximada

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h}$$

Excentricidade local de 2ª ordem

A consideração ou não da excentricidade de 2ª ordem (e_2) depende da comparação entre λ e λ_1 .

Para $\lambda \leq \lambda_1$ tem-se $e_2 = 0$ (em uma dada direção do pilar), e neste caso basta considerar a excentricidade mínima.

Se $\lambda > \lambda_1$, a excentricidade de 2ª ordem deve ser somada à excentricidade mínima

$$e_2 = \frac{\ell_e^2}{10} \left(\frac{1}{r} \right)_{\text{base}}, \text{ com } \left(\frac{1}{r} \right)_{\text{base}} = \frac{0,005}{h(v + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h}$$

Roteiro para pilares

5. Cálculo do momento fletor total e da armadura

5.1 Método do pilar-padrão com curvatura aproximada

força normal adimensional

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}}$$

A_c = área da seção transversal do pilar;

f_{cd} = resistência de cálculo do concreto à compressão ($f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c$).

Roteiro para pilares

5. Cálculo do momento fletor total e da armadura

5.1 Método do pilar-padrão com curvatura aproximada

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h}$$

$$M_{2d} = N_d \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r}$$

N_d = força normal solicitante de cálculo;

ℓ_e = comprimento equivalente;

$1/r$ = curvatura na seção crítica, avaliada pela expressão aproximada

Roteiro para pilares

5. Cálculo do momento fletor total e da armadura

5.1 Método do pilar-padrão com curvatura aproximada

Momento total

$$M_{d,tot} = \alpha_b M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} \geq M_{1d,A}$$

com $M_{1d,A} \geq M_{1d,min}$ e $(\alpha_b \cdot M_{1d,A}) \geq M_{1d,min}$;

α_b = parâmetro definido no item 10.3;

N_d = força normal solicitante de cálculo;

ℓ_e = comprimento equivalente.

$1/r$ = curvatura na seção crítica, já avaliada pela expressão aproximada

Exemplo 1

Dimensionar a armadura longitudinal do pilar mostrado na Figura abaixo, sendo conhecidos:

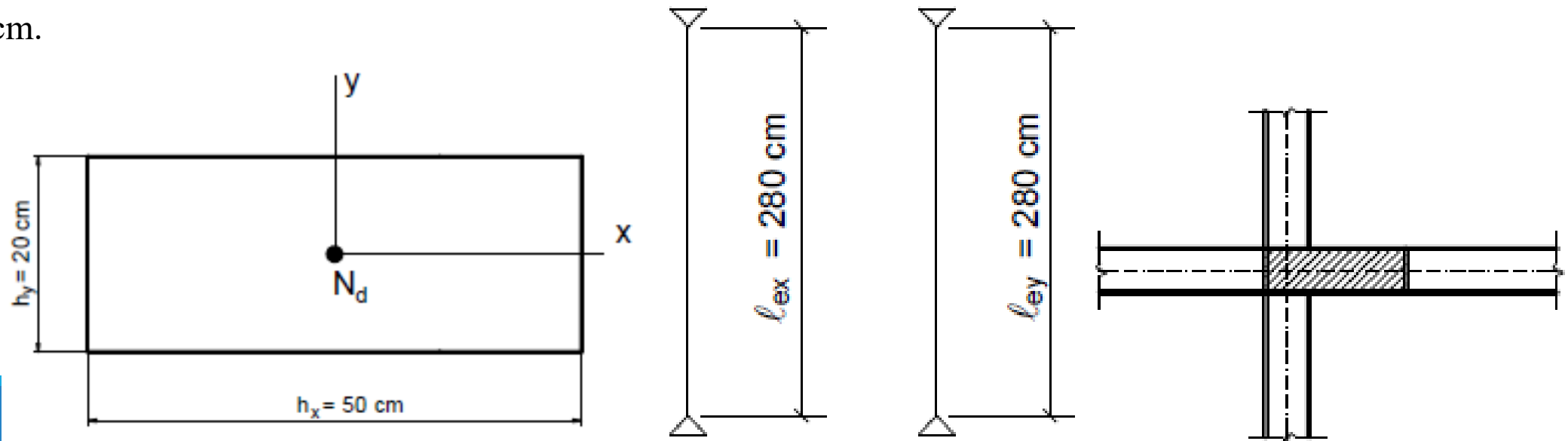
$N_k = 1.000 \text{ kN}$ (100 tf) ;

seção transversal 20 x 50 ($A_c = 1.000 \text{ cm}^2$) ;

comprimento equivalente (de flambagem): $l_{ex} = l_{ey} = 280 \text{ cm}$;

concreto C30;

$d' = 4,0 \text{ cm}$.



Resolução

5. Cálculo do momento fletor total

5.1 método do pilar-padrão de curvatura aproximada

Direção y

Força adimensional

$$v = \frac{N_{sd}}{A_c * f_{cd}}$$

$$v = \frac{1400}{20 * 50 * \left(\frac{3}{1,4}\right)}$$

$$v = 0,65$$

Resolução

5. Cálculo do momento fletor total

5.1 método do pilar-padrão de curvatura aproximada

Direção y

Curvatura

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{base\ y} = \frac{0,005}{h_y*(v+0,5)} \leq \frac{0,005}{h_y}$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{base\ y} = \frac{0,005}{20*(0,65+0,5)}$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{base\ y} = 2,17 * 10^{-4}$$

$$\frac{0,005}{h_y} = \frac{0,005}{20}$$

Resolução

5. Cálculo do momento fletor total

5.1 método do pilar-padrão de curvatura aproximada

Direção y

$$\frac{0,005}{h_y} = 2,5 * 10^{-4}$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{base\ y} = \frac{0,005}{h_y * (v+0,5)} \leq \frac{0,005}{h_y}$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{base\ y} = 2,17 * 10^{-4} \leq \frac{0,005}{h_y} = 2,5 * 10^{-4}$$

$$\rightarrow ok! Usar \left(\frac{1}{r}\right)_{base\ y} = 2,17 * 10^{-4}$$

Resolução

5. Cálculo do momento fletor total

5.1 método do pilar-padrão de curvatura aproximada

Direção y

Excentricidade de 2ª ordem

$$e_{2y} = \frac{l_{ey}^2}{10} * \frac{1}{r}$$

$$e_{2y} = \frac{280^2}{10} * 2,17 * 10^{-4}$$

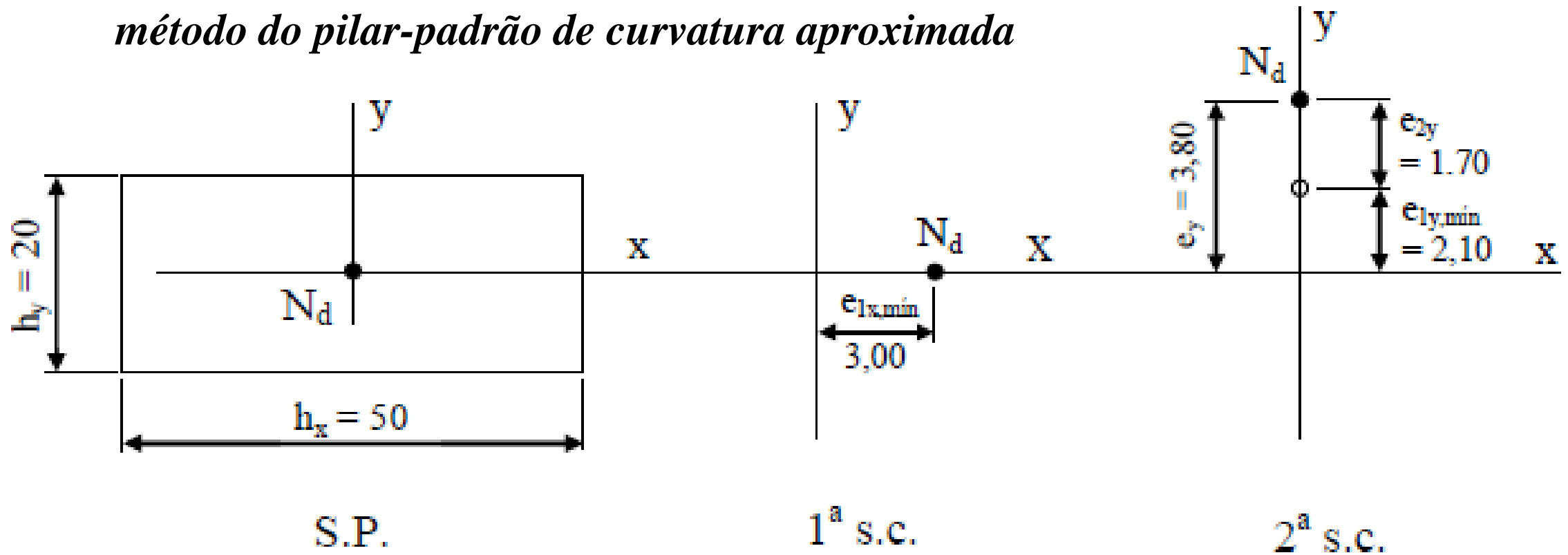
$$e_{2y} = 1,7 \text{ cm}$$

Não precisamos determinar a curvatura e a excentricidade de 2ª ordem na direção x (e_{2x}), pois

$$\lambda_x = 19,37 \leq \lambda_{1x} = 35$$

→ não se considera o efeito local de 2ª ordem na direção considerada

método do pilar-padrão de curvatura aproximada



Em resumo:

Em x: há somente a excentricidade mínima de 1ª ordem ($e_{1x,min} = 3 \text{ cm}$), pois $\lambda_x = 19,37 \leq \lambda_{1x} = 35$
→ não se considera o efeito local de 2ª ordem na direção considerada

Em y: há a excentricidade mínima de 1ª ordem ($e_{1y,min} = 2,1 \text{ cm}$) e excentricidade de 2ª ordem ($e_{2y} = 1,7 \text{ cm}$), pois Como $\lambda_y = 48,44 \leq \lambda_{1y} = 35$
→ se considera o efeito local de 2ª ordem na direção considerada

Resolução

5. Cálculo do momento fletor total

5.1 método do pilar-padrão de curvatura aproximada

Direção x:

Momento total

$$M_{d,tot x} = \alpha_b * M_{1dA} + N_{sd} * \frac{l_{ex}^2}{10} * \frac{1}{r} \geq M_{1dA}, \text{ sendo que } \alpha_b * M_{1dA} \geq M_{1dmín x}$$

Para o pilar intermediário:

→ $M_{1dA} = 0$ (momento de 1ª ordem gerado pela falta de continuidade de vigas em uma das direções)

E como não se considera o efeito local de 2ª ordem ($\lambda_x = 19,37 \leq \lambda_{1x} = 35$)

$$\rightarrow \frac{l_{ex}^2}{10} * \frac{1}{r} = 0$$

$$M_{d,tot x} = M_{1dmín x}$$

$$M_{d,tot x} = 4200 \text{ kN.cm}$$

Resolução

5. Cálculo do momento fletor total

5.1 método do pilar-padrão de curvatura aproximada

Direção y

Momento total

$$M_{d,tot y} = \alpha_b * M_{1dA} + N_{sd} * \frac{l_{ey}^2}{10} * \frac{1}{r} \geq M_{1dA}, e \alpha_b * M_{1dA} \geq M_{1dmín y}$$

Para o pilar intermediário:

$$\rightarrow M_{1dA} = 0$$

$$e_{2y} = \frac{l_{ey}^2}{10} * \frac{1}{r} = 1,7 \text{ cm}$$

$$M_{d,tot y} = M_{1dmín y} + N_{sd} * e_{2y}$$

$$M_{d,tot y} = 2940 + 1400 * 1,7$$

$$M_{d,tot y} = 5320 \text{ kN.cm}$$

Método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada

pode ser empregado apenas no cálculo de pilares com $\lambda \leq 90$, com seção retangular constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo

A não linearidade geométrica deve ser considerada de forma aproximada, supondo-se que a deformação da barra seja senoidal

A não linearidade física deve ser considerada através de uma expressão aproximada da rigidez

$$19200 M_{d,tot}^2 + (3840 h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200 \alpha_b M_{1d,A}) M_{d,tot} - 3840 \alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

Roteiro para pilares

5.2 método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada

$$19200 M_{d,tot}^2 + (3840 h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200 \alpha_b M_{1d,A}) M_{d,tot} - 3840 \alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

$$a * x^2 + b * x + c = 0$$

$$\text{Incógnita } (x) = M_{d,tot}$$

$$a = 19200$$

$$b = 3840 * h * N_{sd} - \lambda^2 * h * N_{sd} - 19200 * \alpha_b * M_{1dA}$$

$$c = -3840 * \alpha_b * h * N_{sd} * M_{1dA}$$

Exemplo 1

Dimensionar a armadura longitudinal do pilar mostrado na Figura abaixo, sendo conhecidos:

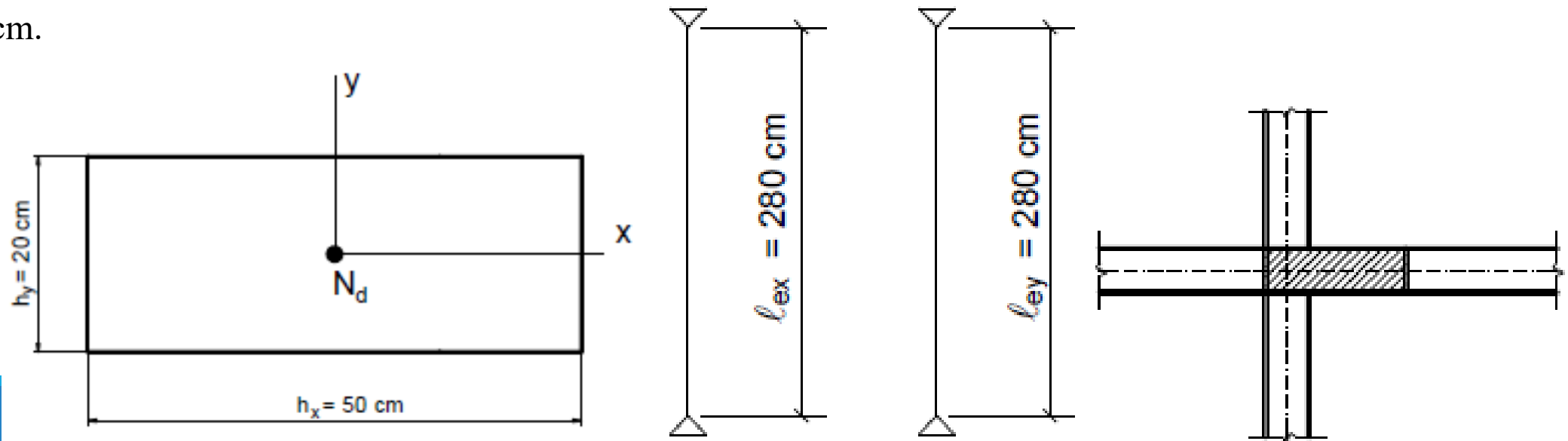
$N_k = 1.000 \text{ kN}$ (100 tf) ;

seção transversal 20 x 50 ($A_c = 1.000 \text{ cm}^2$) ;

comprimento equivalente (de flambagem): $l_{ex} = l_{ey} = 280 \text{ cm}$;

concreto C30;

$d' = 4,0 \text{ cm}$.



Resolução

5.2 método do pilar padrão com rigidez κ aproximada

Na direção y

$$19200 * M_{d,tot y}^2 + (3840 * h_y * N_{sd} - \lambda^2 * h_y * N_{sd} - 19200 * \alpha_b * M_{1dA}) * M_{d,tot y} - 3840 * \alpha_b * h_y * N_{sd} * M_{1dA} = 0$$

$$a = 19200/19200$$

$$b = (3840 * h_y * N_{sd} - \lambda^2 * h_y * N_{sd} - 19200 * \alpha_b * M_{1dA})/19200$$

Como o pilar é intermediário:

$$M_{1dA} = M_{1d,min y}$$

$$b = (3840 * 20 * 1400 - 48,44^2 * 20 * 1400 - 19200 * 1 * 2940)/19200$$

$$b = -761,88$$

$$c = (-3840 * \alpha_b * h_y * N_{sd} * M_{1d,min y})/19200$$

$$c = (-3840 * 1 * 20 * 1400 * 2940)/19200$$

$$c = -16 464 000$$

$$M_{d,tot y}^2 - 761,88 * M_{d,tot y} - 16 464 000 = 0$$

Resolução

5.2 método do pilar padrão com rigidez κ aproximada

Na direção y

$$M_{d,tot y}^2 - 761,88 * M_{d,tot y} - 16\,464\,000 = 0$$

$$M_{d,tot y} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4*a*c}}{2*a}$$

$$M_{d,tot y} = \frac{-(-761,88) \pm \sqrt{(-761,88)^2 - (4*1*-16.464.000)}}{2}$$

$$M_{d,tot y 1} = \frac{-(-761,88) + 8150,86}{2}$$

$$M_{d,tot y 1} = 4456,37 \text{ kN.cm}$$

$$M_{d,tot y 2} = \frac{-(-761,88) - 8150,86}{2}$$

$$M_{d,tot y 2} = -3694,49 \text{ kN.cm}$$

Roteiro para pilares

6. armadura

A armadura do pilar é determinada por meio do maior momento obtido

$$\mu = \nu * \frac{e}{h}, \text{ com } h \text{ e } e \text{ na direção considerada}$$

Ou

$$\mu = \frac{M_{d,tot}}{h * A_c * f_{cd}}$$

$M_{d,tot}$ momento total na direção considerada

h altura do pilar na direção considerada

A_c área da seção transversal de concreto

f_{cd} resistência à compressão de projeto do concreto armado

Roteiro para pilares

6. armadura

ÁBACOS DE VENTURINI

Cada ábaco tem um detalhamento da armadura na seção transversal, conforme o desenho mostrado no lado superior

Deve sempre ser observado o posicionamento correto da armadura na seção transversal do pilar, de acordo com o ábaco escolhido

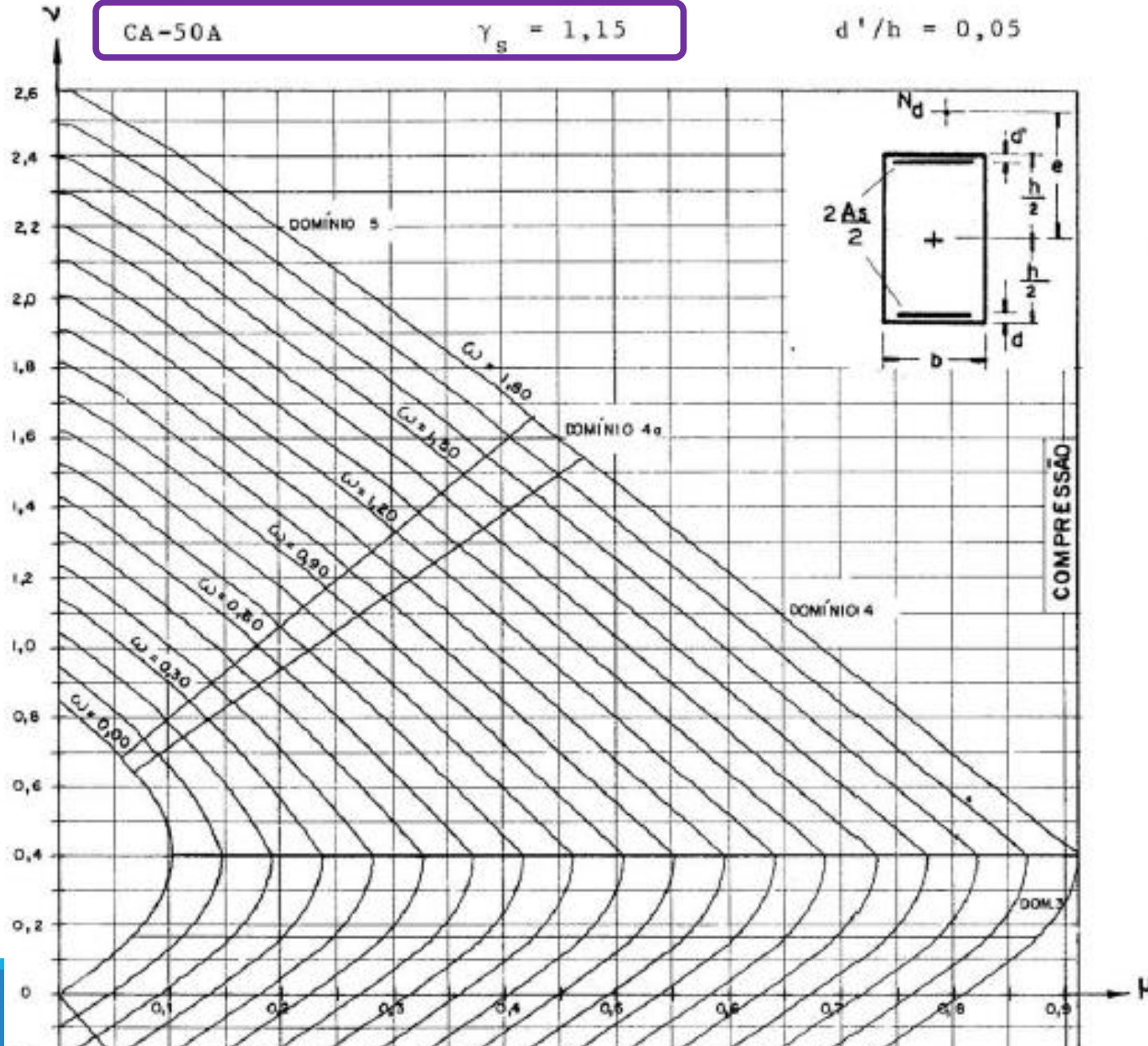
$$\frac{d'}{h}$$

ÁBACO A-1

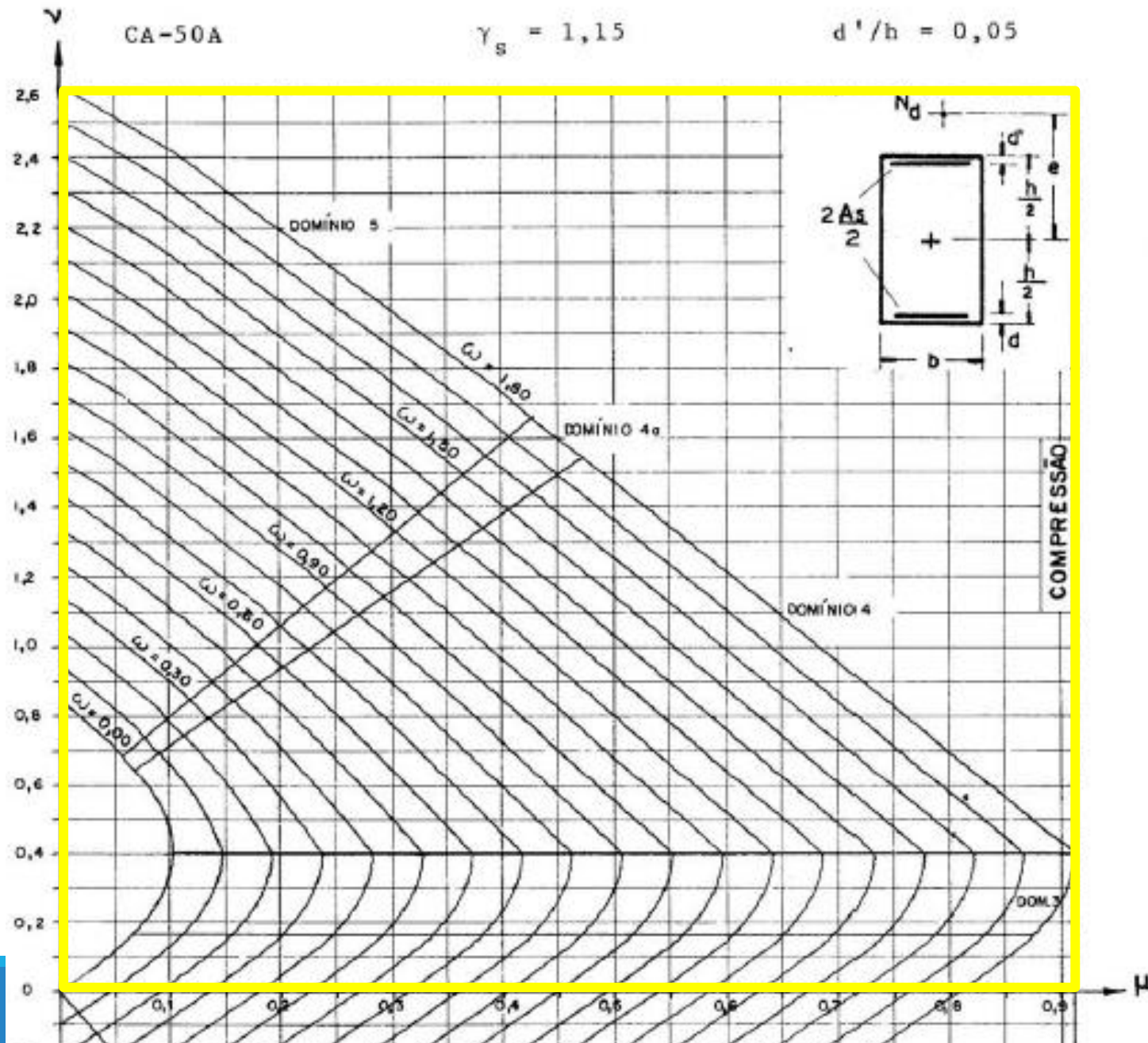
CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$



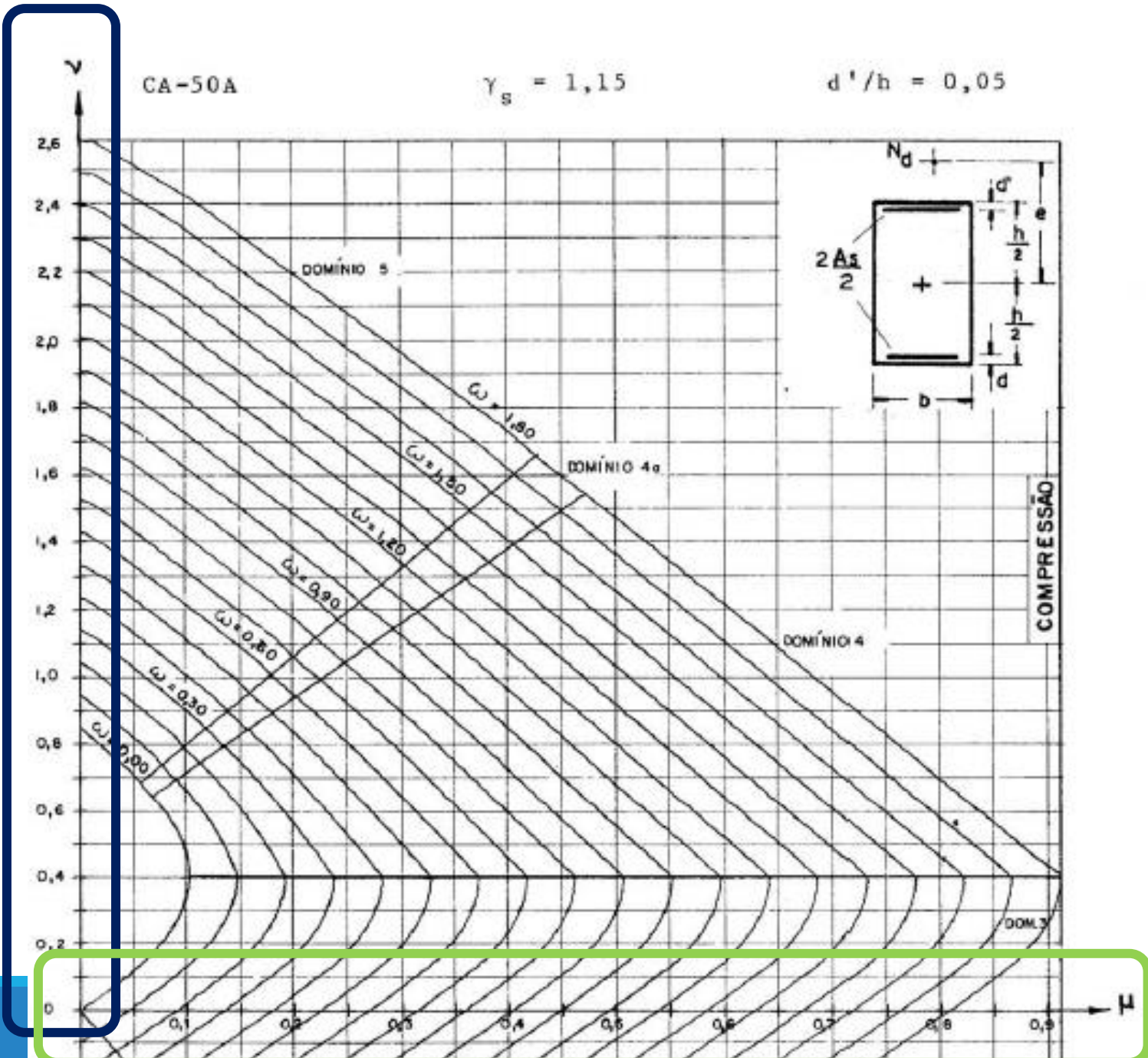
Indicação do ábaco
O tipo de aço a que se refere o ábaco e o respectivo coeficiente de segurança proveniente da norma (todos os ábacos se referem ao CA-50)



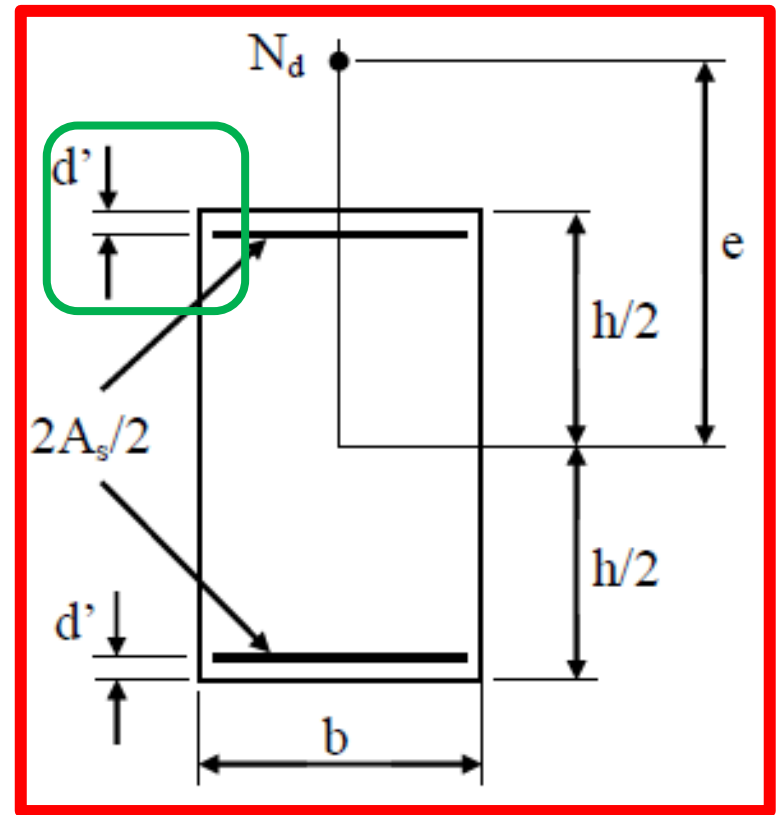
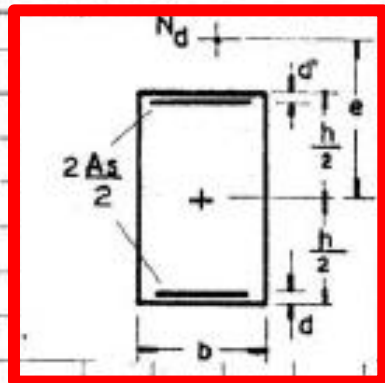
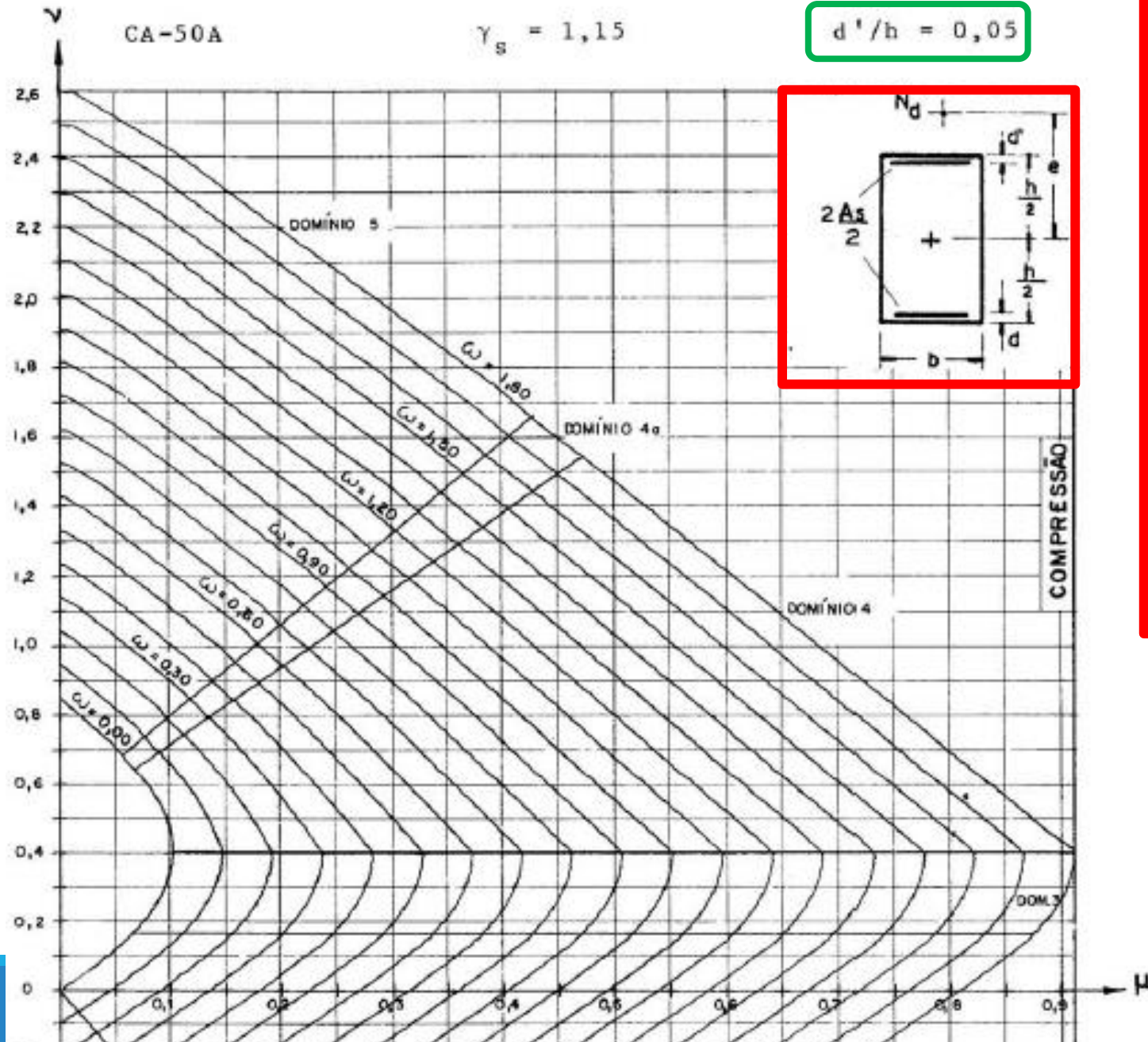
Região de peças comprimidas do ábaco de venturini

ÁBACO A-1

ν



μ



Roteiro para pilares

6. armadura

ÁBACOS DE VENTURINI

ábacos A-1 a A-5

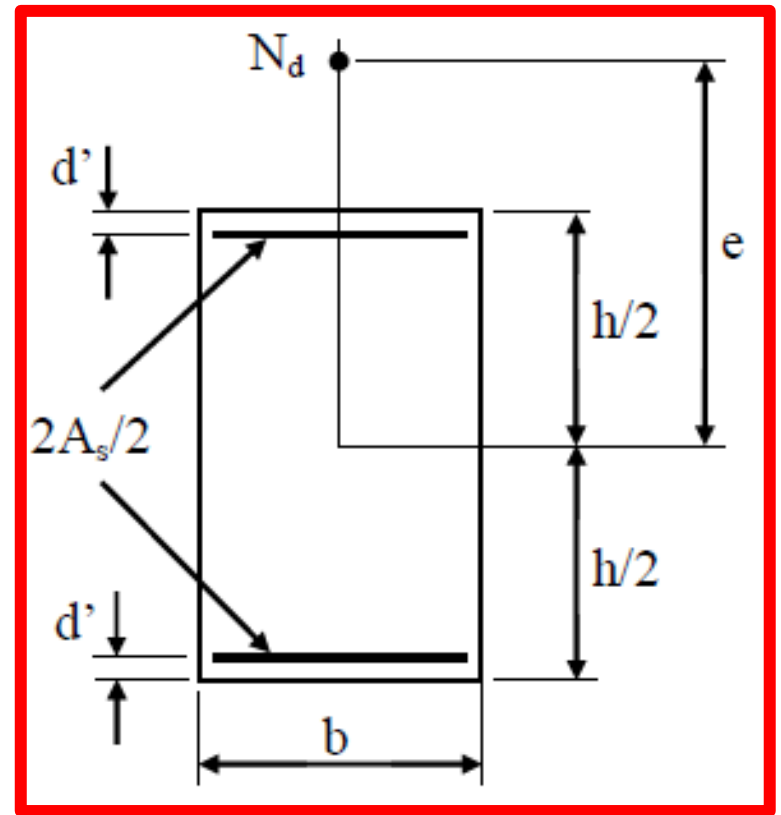
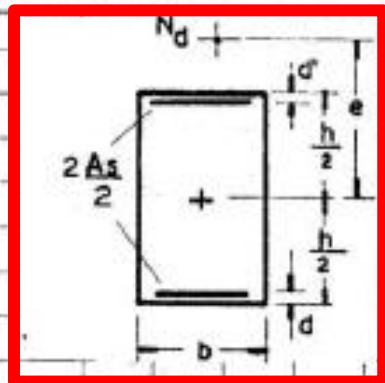
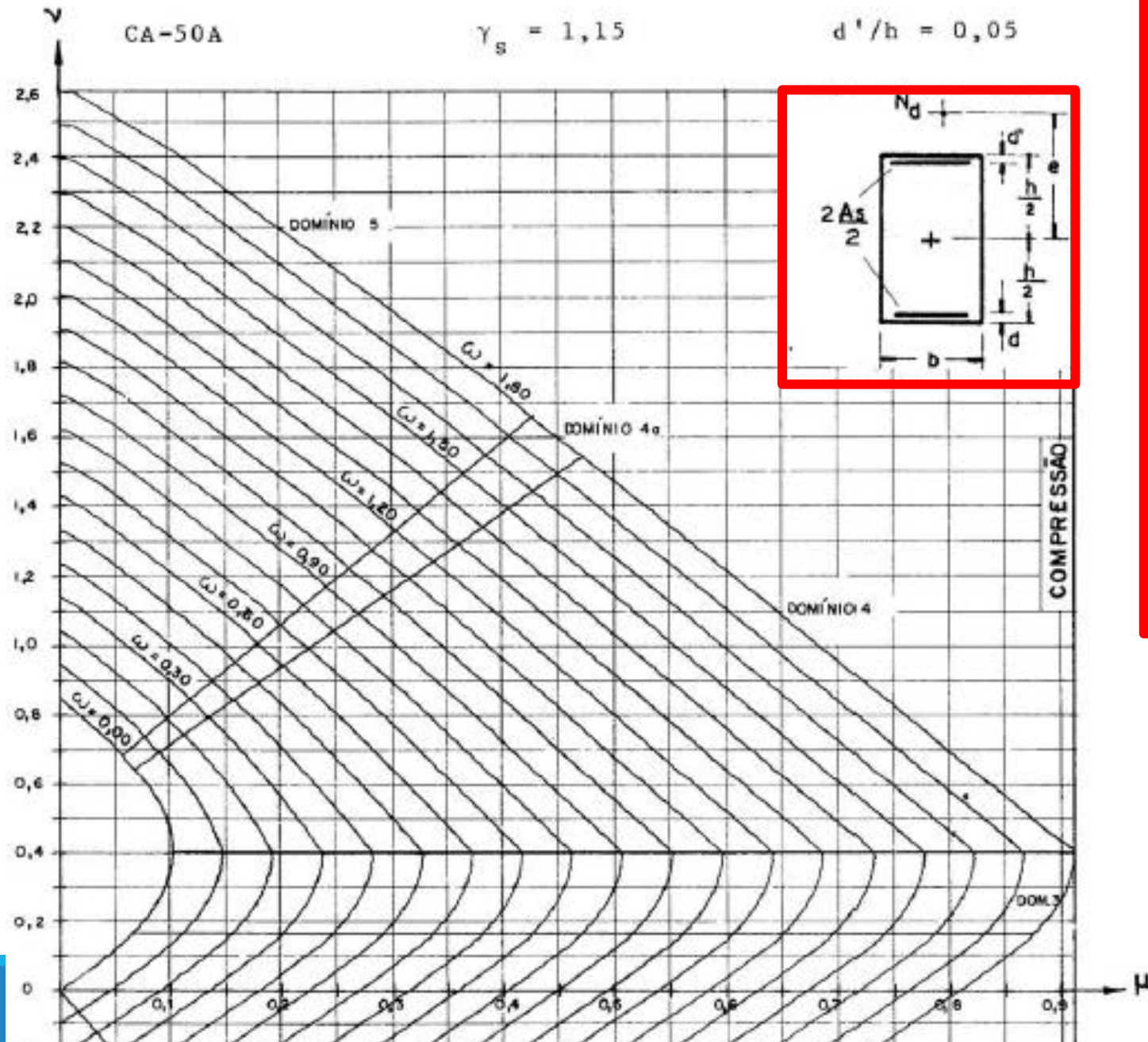
metade da armadura é disposta em uma face e a outra metade na face oposta

não fixam a quantidade de barras, uma quantidade qualquer pode ser colocada nas duas faces, sendo por isso muito interessantes

a armadura é posicionada nas faces ou lados com direção perpendicular à excentricidade (e) da força N_d

E não é correto considerar que a posição da armadura no desenho indica que deve ser posicionada nos lados menores do pilar.

ÁBACO A-1



Roteiro para pilares

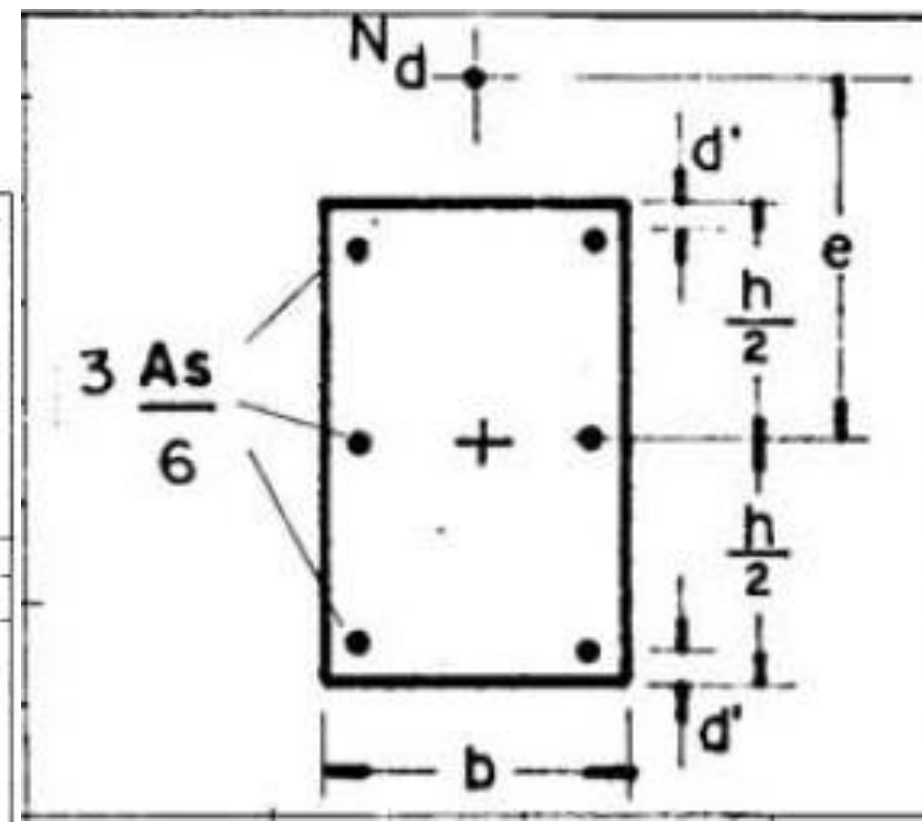
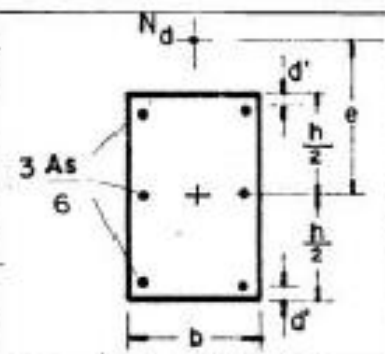
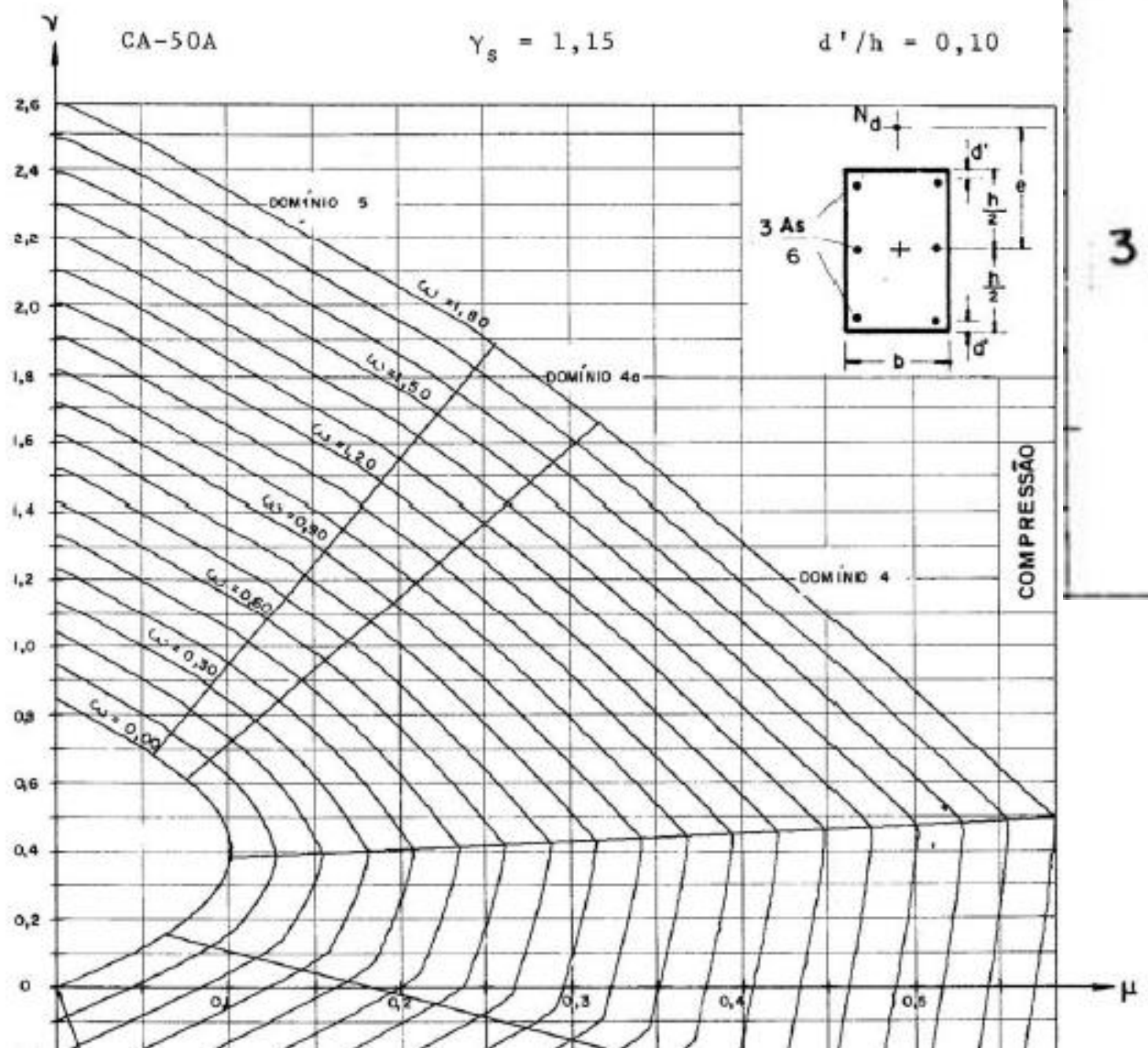
6. armadura

ÁBACOS DE VENTURINI

Demais ábacos

Outros ábacos têm fixado o número total de barras, bem como o número de barras em cada face

ÁBACO A-7

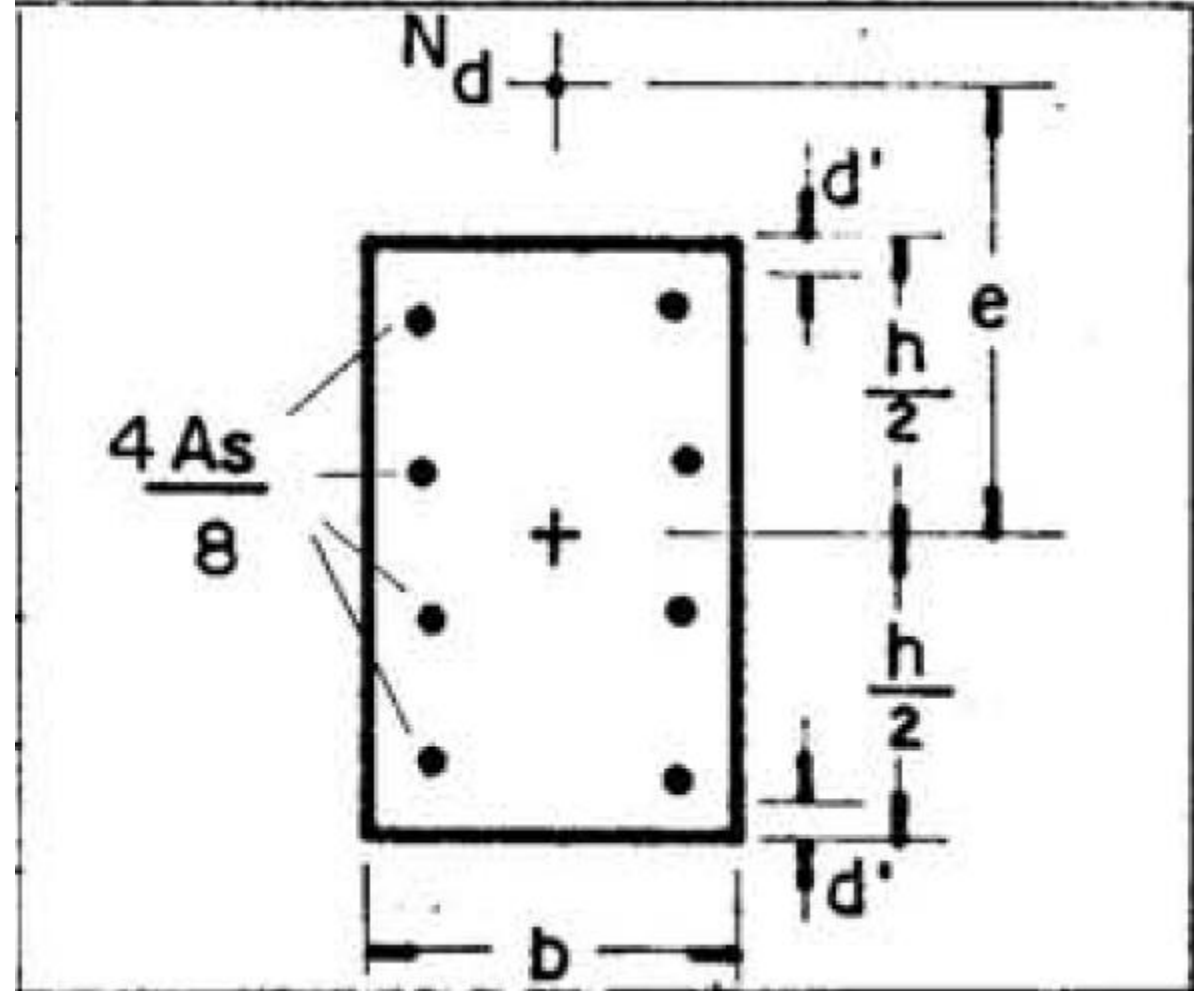
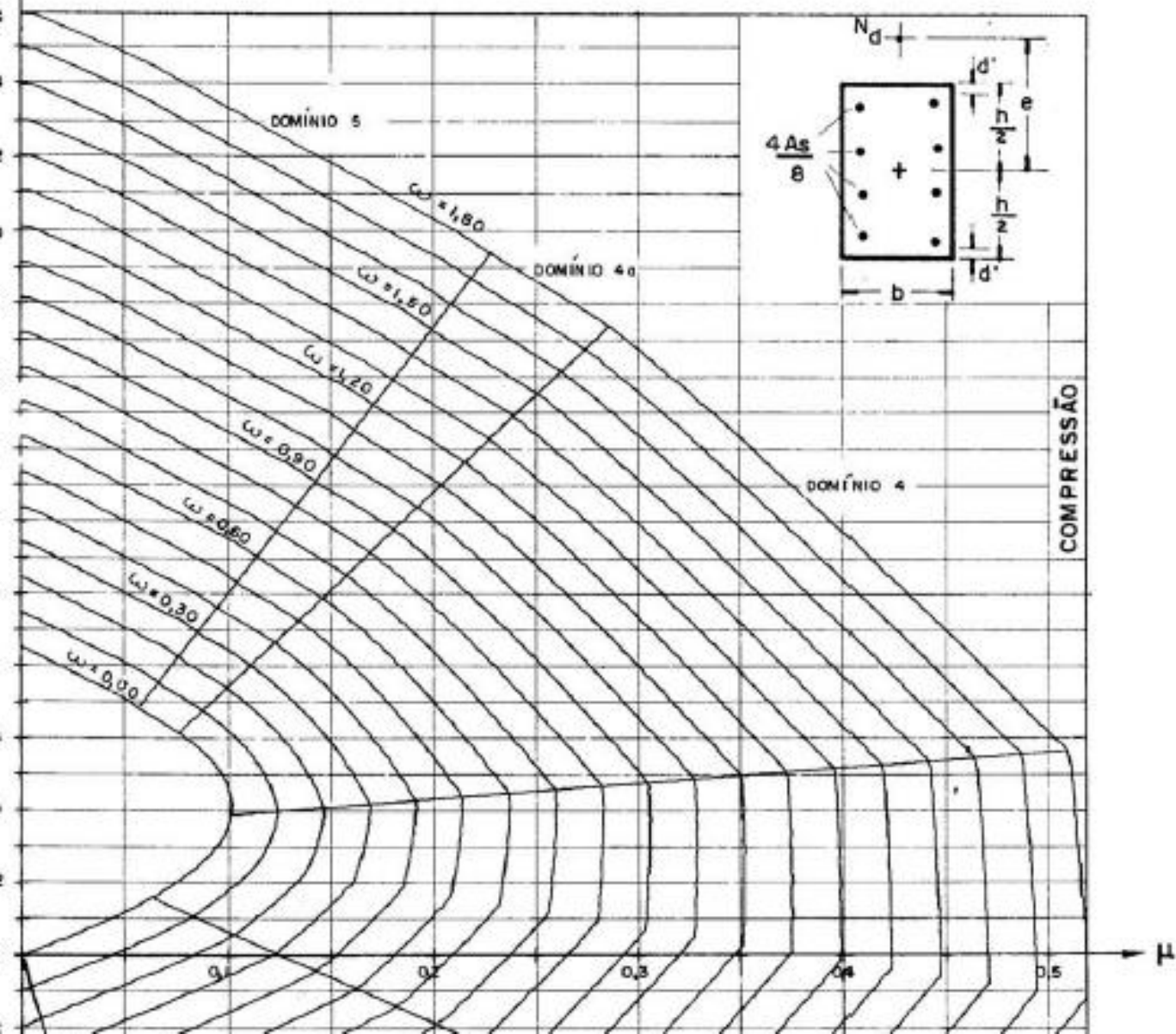


ÁBACO A-11

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$



Exemplo 1

Dimensionar a armadura longitudinal do pilar mostrado na Figura abaixo, sendo conhecidos:

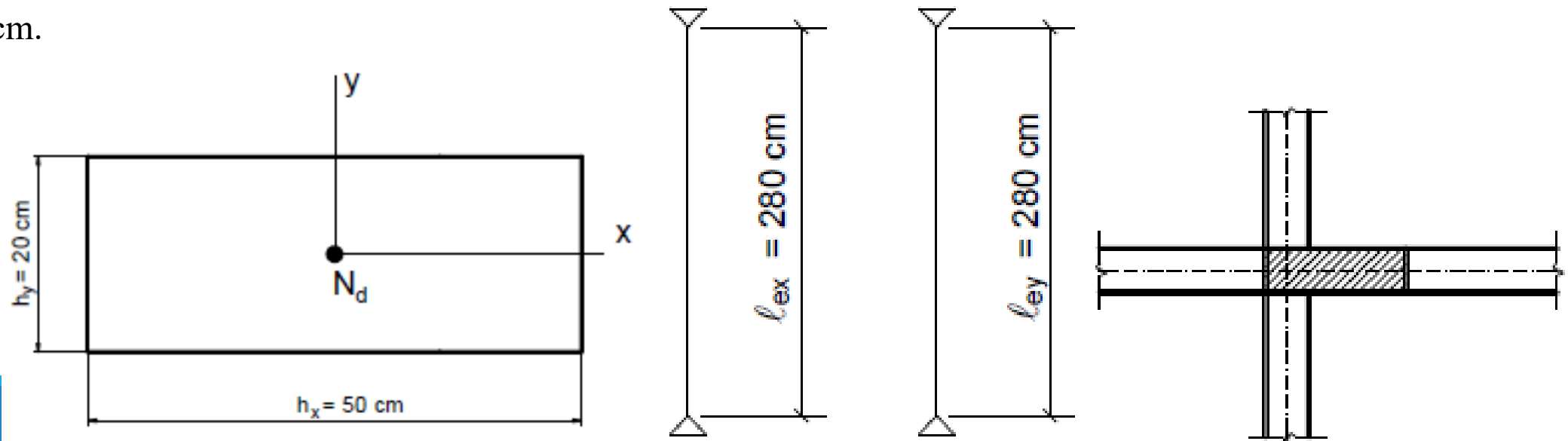
$N_k = 1.000 \text{ kN}$ (100 tf) ;

seção transversal 20 x 50 ($A_c = 1.000 \text{ cm}^2$) ;

comprimento equivalente (de flambagem): $l_{ex} = l_{ey} = 280 \text{ cm}$;

concreto C30;

$d' = 4,0 \text{ cm}$.



rigidez aproximada $\rightarrow M_{d,tot y} = 4456,37 \text{ kN.cm}$

Curvatura aproximada $\rightarrow M_{d,tot x} = 4200 \text{ kN.cm}$

Curvatura aproximada $\rightarrow M_{d,tot y} = 5320 \text{ kN.cm}$

Resolução

6. Cálculo da armadura longitudinal

(A armadura do pilar é determinada por meio do maior momento obtido)

$$\mu_y = \nu * \frac{e_y}{h_y}$$

$$\mu_y = 0,65 * \frac{(2,1+1,7)}{20}$$

$$\mu_y = 0,12$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4}{20}$$

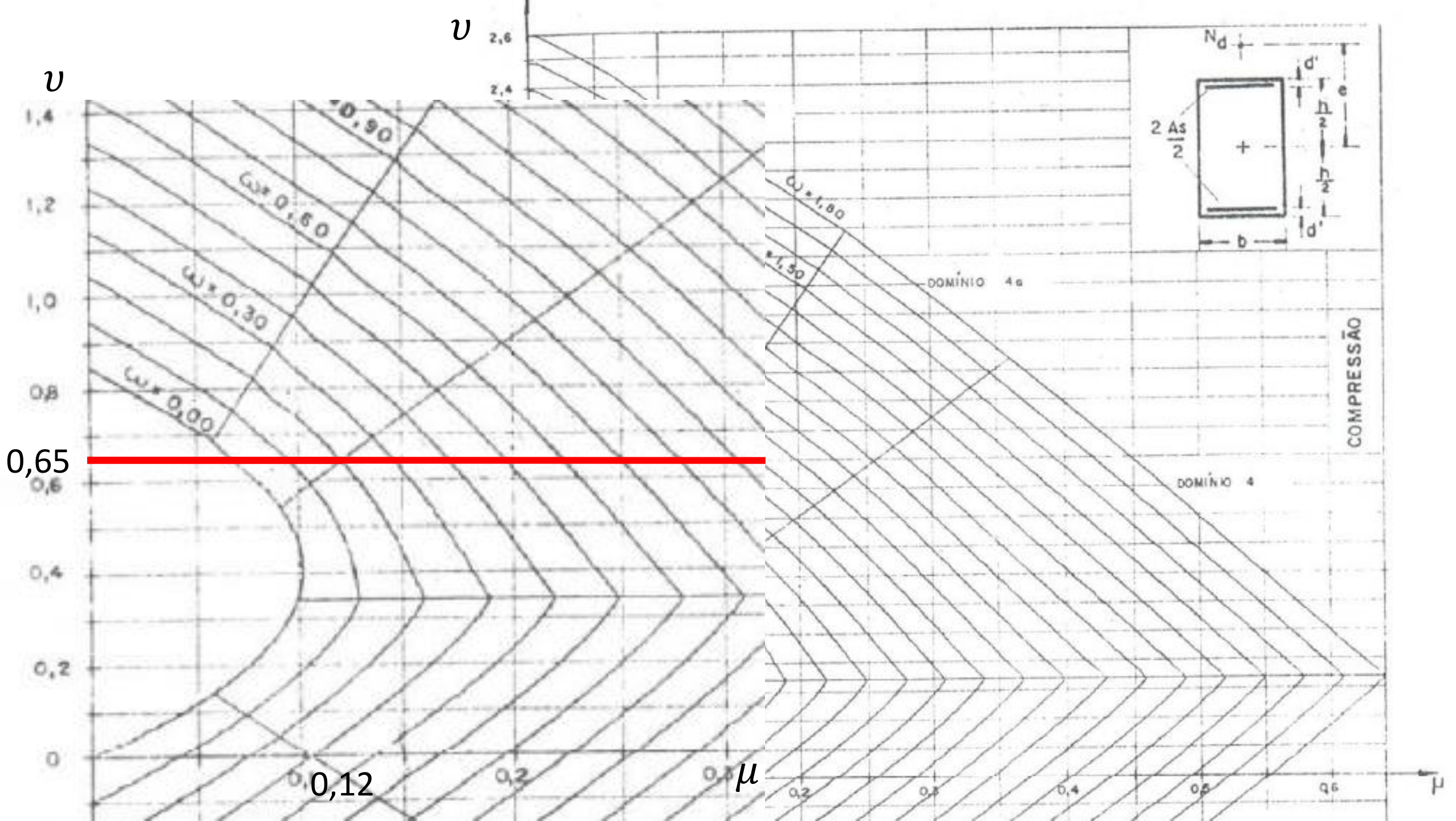
$$\frac{d'_y}{h_y} = 0,2$$

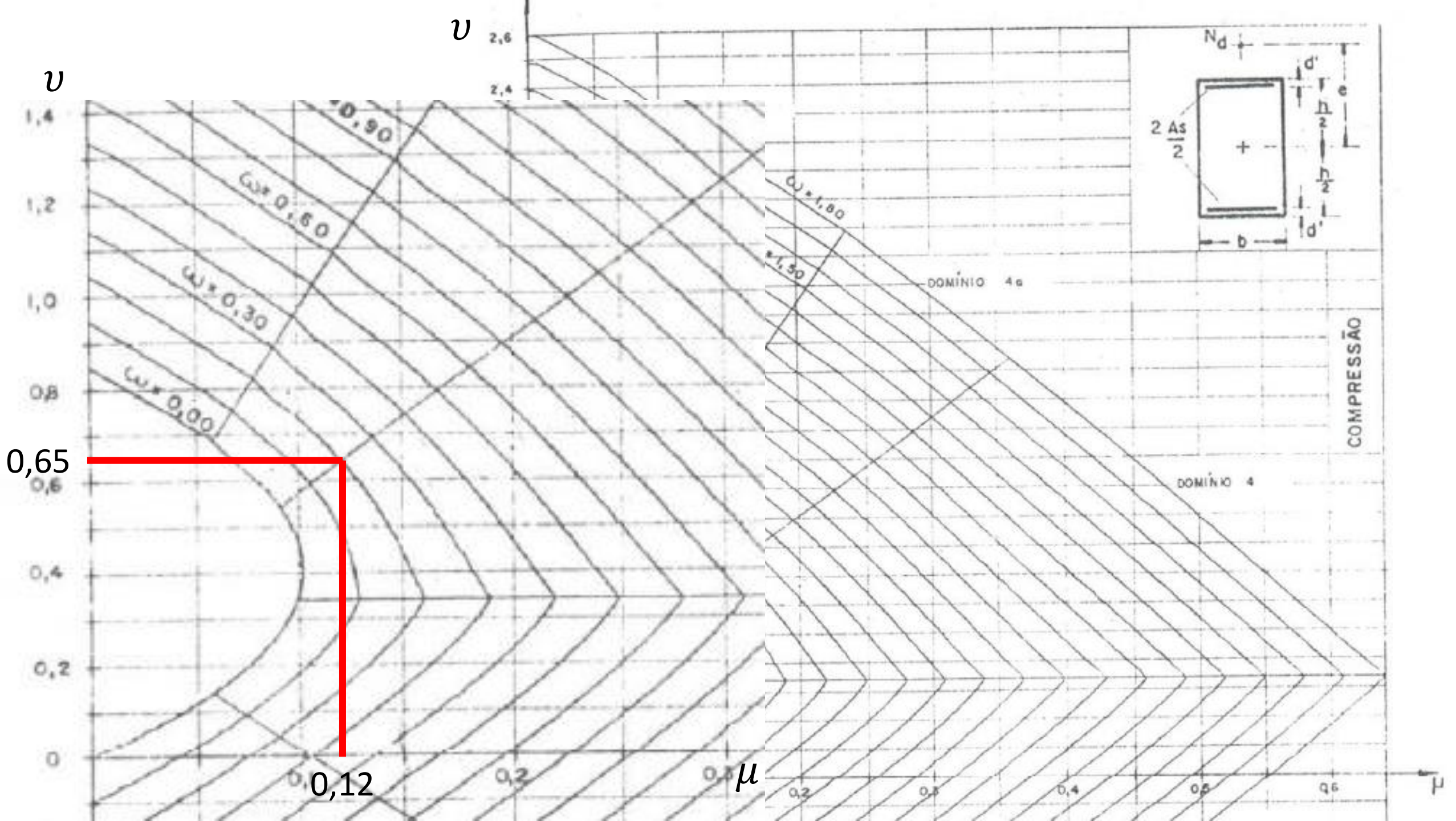
OU

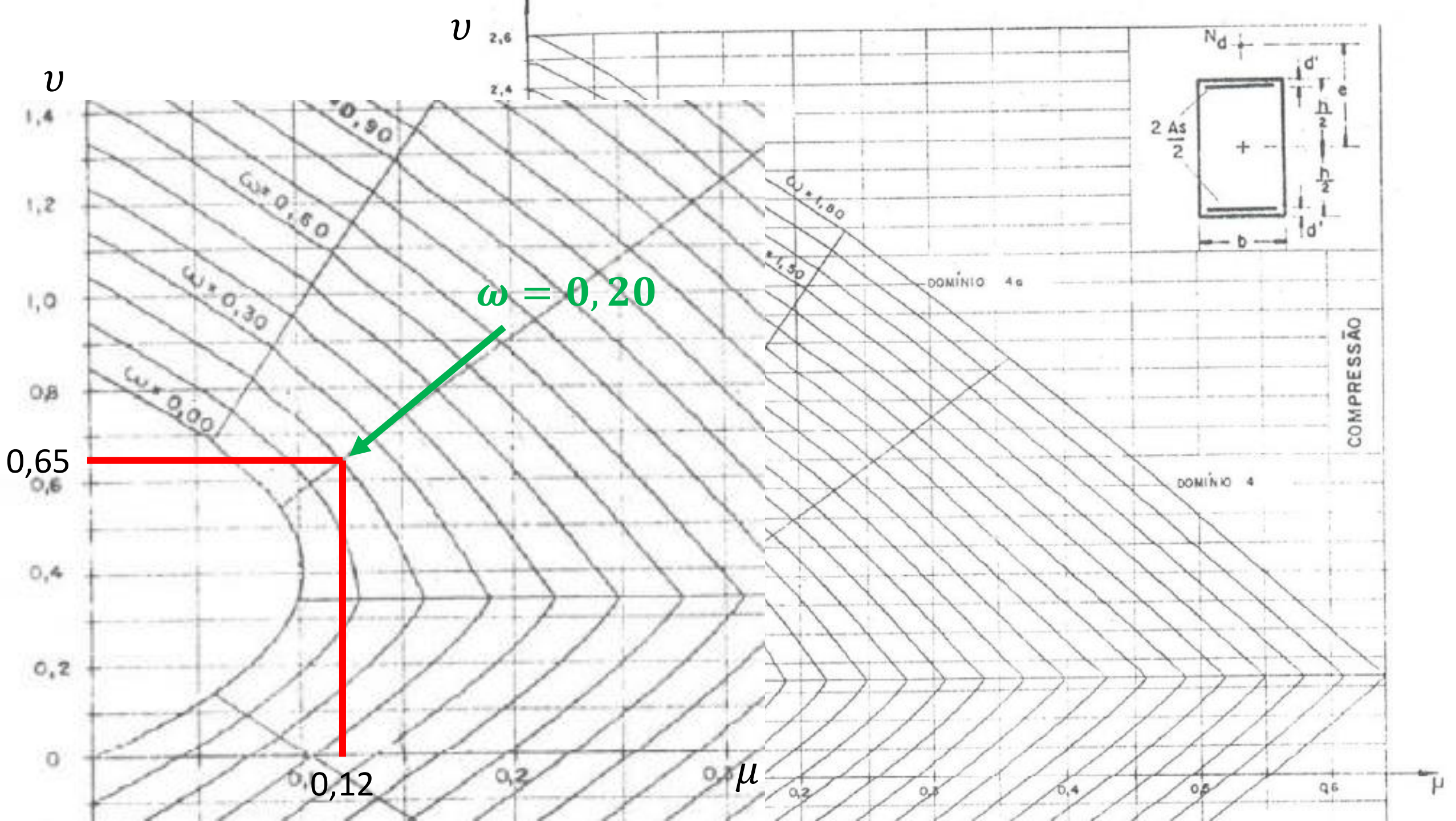
$$\mu_y = \frac{M_{d,tot y}}{h_y * A_c * f_{cd}}$$

$$\mu_y = \frac{5320}{20 * 20 * 50 \left(\frac{3}{1,4}\right)}$$

$$\mu_y = 0,12$$







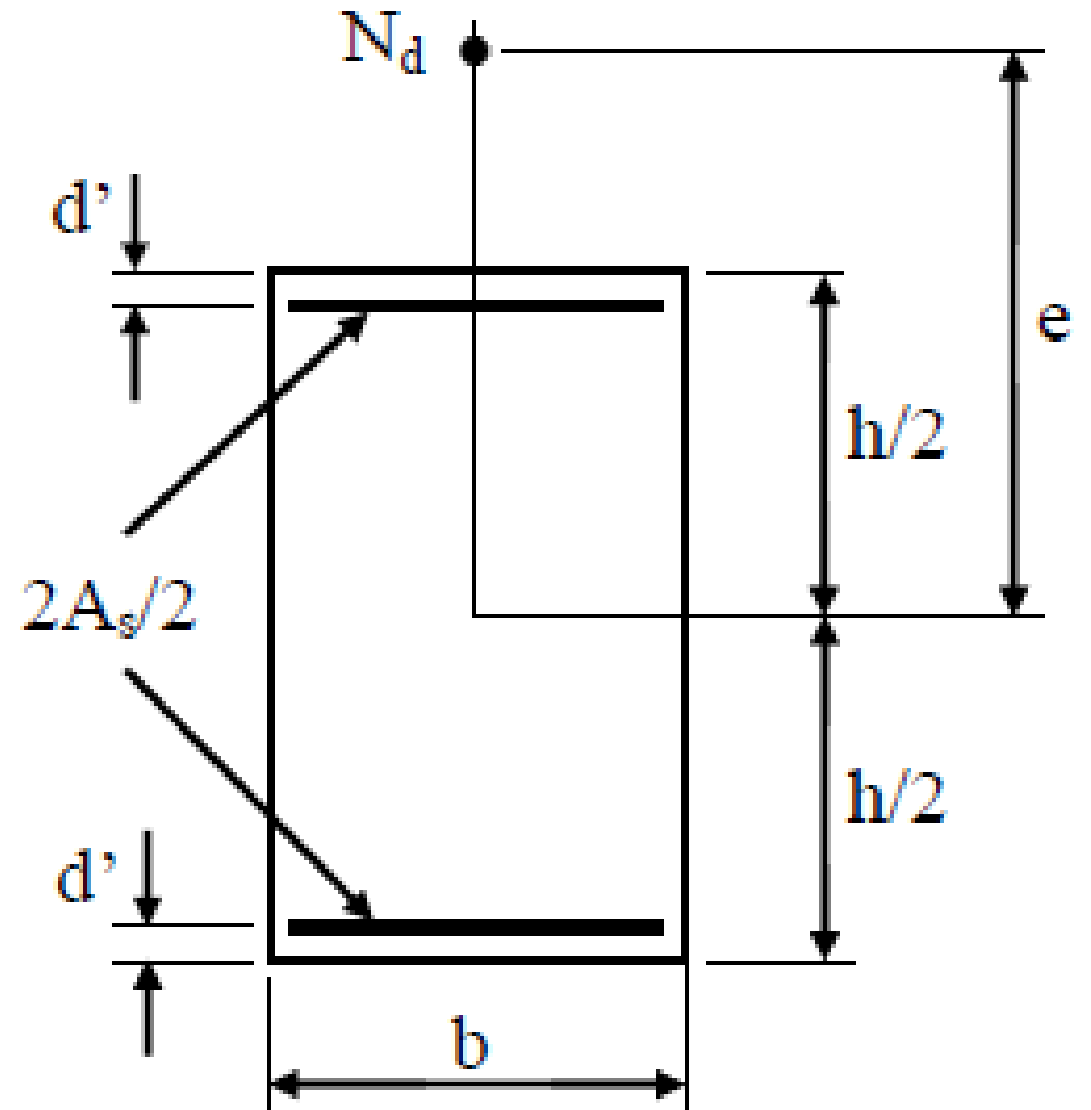
resolução

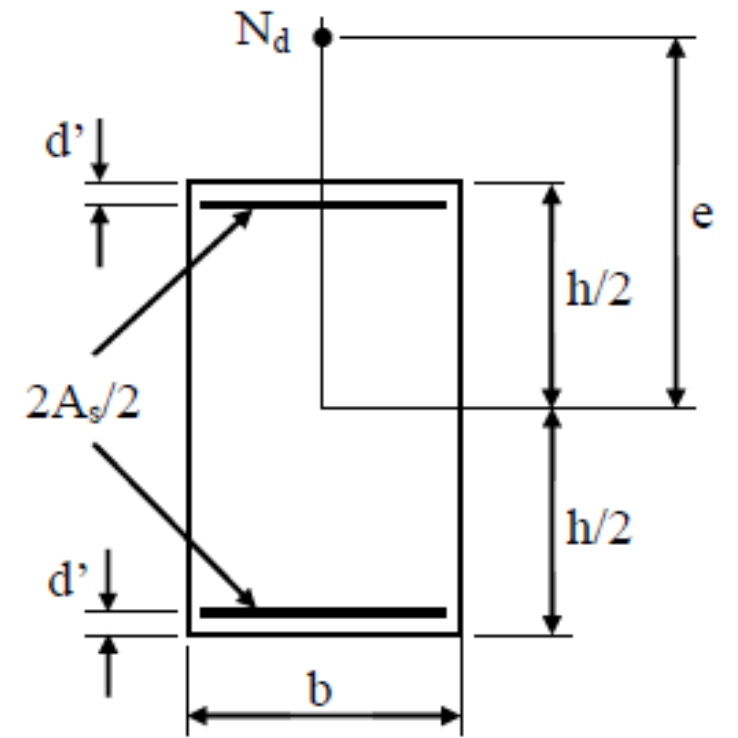
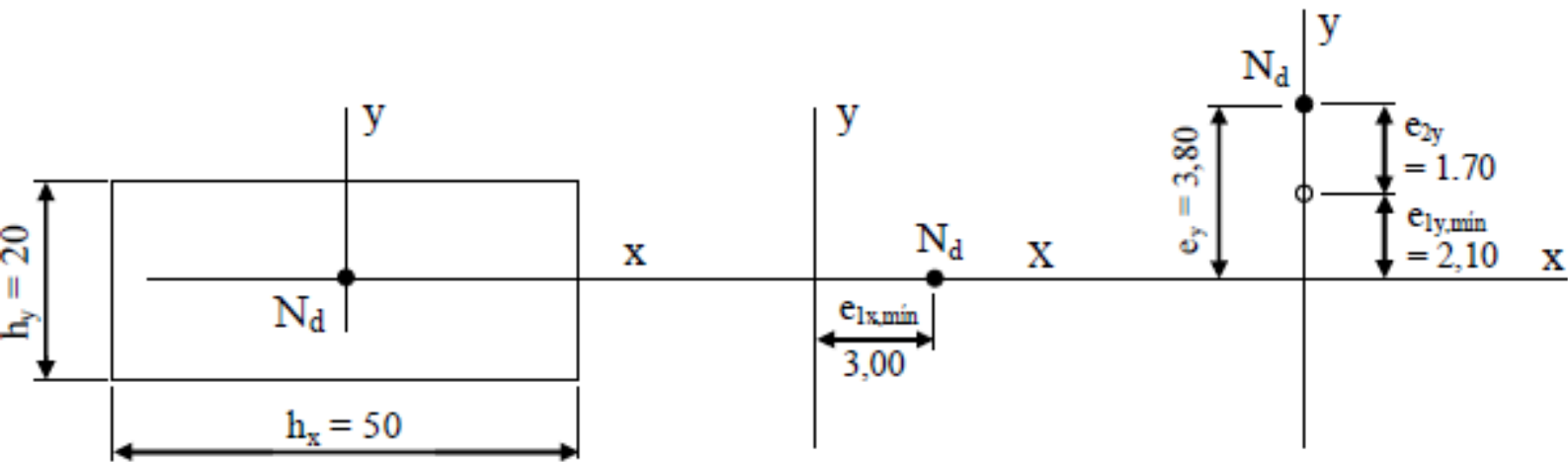
6. Cálculo da armadura longitudinal

$$A_s = \frac{\omega * A_c * f_{cd}}{f_{yd}}$$

$$A_s = \frac{0,2 * 20 * 50 * \left(\frac{3}{1,4}\right)}{\left(\frac{50}{1,15}\right)}$$

$$A_s = 9,86 \text{ cm}^2$$





S.P. 1ª s.c. 2ª s.c.

6. Cálculo da armadura longitudinal

$$A_s = 9,86 \text{ cm}^2$$

Serão 2 camadas de barras de aço e metade da A_s vai para cada camada

Diâmetro (mm)	Área unitária (A_{uni}) (cm ²)	Número de barras
10	0,78	$9,86/0,78=13$
12,5	1,22	$9,86/1,22=9$
16	2,01	$9,86/2,01=5$
20	3,14	$9,86/3,14=4$

Resolução

Diâmetro (mm)	Área unitária (A_{uni}) (cm ²)	Número de barras
10	0,78	$9,86/0,78=13$
12,5	1,22	$9,86/1,22= 9$
16	2,01	$9,86/2,01=5$
20	3,14	$9,86/3,14= 4$

